1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 6 Οκτωβρίου 2019

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να αποδειχθεί ότι όταν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής σε αυτό . **(7μ)**

Β)

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x,\ \alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να γράψετε τον τύπο της παραγώγου. **(5μ)**
2. Πότε μία συνάρτηση f καλείται παραγωγίσιμη στο [α,β] του πεδίου ορισμού της. **(4μ)**

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό **(Σ)** ή Λάθος **(Λ)**.

1. Η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0.
2. Κάθε συνάρτηση έχει ακριβώς ένα σημείο τομής με την εφαπτομένη της.
3. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.
4. Αν f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)\cdot g'(x_0) - f'(x_0)\cdot g(x_0)}{g^2(x_0)}$.
5. Αν η f είναι συνεχής τότε είναι και παραγωγίσιμη.

(5μ)

Δ) Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

<< Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ >>

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α αν είναι αληθής , ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής.
β) Να αιτιολογήστε την απάντηση σας στο ερώτημα α). **(1+3μ)**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , x < 0 \\ 2\sqrt{x} + \beta x + \gamma , & x \geq 0 \end{cases}$. Δίνεται ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση και για x=4 έχει εφαπτόμενη παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.

1. Να αποδειχθεί ότι β=0 και γ=1. **(8μ)**
2. Να βρεθεί η $f'(x)$. **(7μ)**

1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

3. Για $x \geq 0$ να αποδειχθεί ότι η f είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}. **(6μ)**

4. Για $x \geq 0$: $f(\mathrm{x}) = 2\sqrt{x} + 1$ τότε να λυθεί η εξίσωση $f\left(f^{-1}(\mathrm{x}^4+1)+5\right) = 7$. **(4μ)**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν :

- $\eta\mu^2 x - x^4 \leq x f(\mathrm{x}) \leq \eta\mu^2 x + x^4,\ x \in \mathbb{R}$ και f συνεχής στο 0.
- $g(x) = 2\ln x + 5x^3 - 5$

1. Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1 και να βρεθούν οι ρίζες της. **(4+2 μ)**
2. Να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(e^5 \cdot x^{-2}\right) \leq 5x^3$ για $x > 0$. **(6 μ)**
3. Αν είναι γνωστό ότι η g^{-1} είναι παραγωγίσιμη να βρεθεί το $\left(g^{-1}\right)'(0)$. **(6 μ)**
4. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτόμενης της C_f για x=0 **(7 μ)**

ΘΕΜΑ 4ο

Αν για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύουν :

- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\mathrm{x}+3\mathrm{h}) - f(\mathrm{x}-\mathrm{h})}{2h} = 4x^2 + \ln x^2,\ x > 0$ και $f(1) = 2$
- $g(\mathrm{x}) = \left(x^2+1\right)^{-x},\ x > 0$

1. Να υπολογίσετε την g', στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι g είναι γνησίως φθίνουσα και να βρεθεί το πρόσημο της. **(5+3+1 μ)**
2. Να αποδειχθεί ότι $f'(\mathrm{x}) = 2\,\mathrm{x}^2 + \ln x,\ x > 0$ και να βρεθεί η μονοτονία της f'. **(5+2 μ)**
3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\left(f\left(\mathrm{g(x)}+1\right) - 2\right) \cdot \left(x^2+1\right)^x\right]$. **(4 μ)**
4. Να λύσετε την ανίσωση $f'\left(\ln(\mathrm{x}^2+1)+2\right) \cdot g\left((\mathrm{x}^2+1)^{-1}+1\right) \leq f'\left((\mathrm{x}^2+1)^{-1}+1\right) \cdot g\left(\ln(\mathrm{x}^2+1)+2\right)$. **(5 μ)**

...ΕΥΧΟΜΕΘΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑ...