1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 05/01/2019

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΖΗΤΗΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}$

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης της συνάρτησης f στο $+\infty$

Α3. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός: «Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της»
Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως αληθείς ή ψευδείς

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in(0,1)$ τότε $f(0)\neq f(1)$
2. Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$
3. Αν $f(x)=\left(x^2-1\right)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος της f ισούται με 0
4. Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\eta\mu x}\overset{DLH}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=0$
5. Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g ισχύει ότι $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{g^2(x)}$, $g(x)\neq 0$

ΖΗΤΗΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

Β1. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες. Αν δεν είναι ίσες να προσδιορίσετε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο $f(x)=g(x)$

Β2. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$

Β3. Να βρείτε την παράγωγο της f και να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.
Στη συνέχεια να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=1908$ έχει μια ακριβώς λύση στο $(1,+\infty)$

Β4. Να υπολογίσετε το $\int_2^e f(x)\cdot\ln(x-1)dx$

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ με $2\le f'(x)\le 5$ για κάθε $x\in[0,4]$ και $f(0)=1$

Γ1. Να δείξετε ότι $9\le f(4)\le 21$

Γ2. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,4]$ τέτοιο ώστε $5\le f(\xi)\le 11$

Γ3. Αν επιπλέον f' συνεχής, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_1\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $\left(f'(\xi_1)\right)^2-6f'(\xi_1)+3\xi_1=0$

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $(x_0-2)f(x_0)+\dfrac{\left(x_0{}^2-4x\right)f'(x_0)}{2}=2-x_0$

ΖΗΤΗΜΑ Δ

Δ1. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ ισχύει $|g(x)|\le 1$

Δ2. Να βρείτε την παράγωγο g' της g, και το πρόσημο της g'

Δ3. Να υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\cdot \sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)$

Δ4. Να βρείτε τις τιμές των $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases} g(x), & x\le 1\\ x^2+\beta x+\gamma, & x>1\end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο 1

Δ5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x>\lambda\\ \dfrac{3x^3+2x^2+3x}{x^2+1}, & x\le\lambda\end{cases}$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε η f να είναι συνεχής

ΜΟΝΑΔΕΣ

ΖΗΤΗΜΑ Α (8 – 3 – 4 – 10)
ΖΗΤΗΜΑ Β (8 – 5 – 6 – 6)
ΖΗΤΗΜΑ Γ (6 – 7 – 6 – 6)
ΖΗΤΗΜΑ Δ (3 – 4 – 4 - 6 – 8)