ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓ. Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 5-1-2019

ΖΗΤΗΜΑ 1

A3. ΨΕΥΔΗΣ.

π.χ. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} \underset{\sqrt{x}>0}{=} +\infty$ άρα η f δεν είναι παρ/μη στο 0

A4 1. Σ 2. Λ 3. Σ 4. Λ 5. Λ

ΖΗΤΗΜΑ 2

B1 $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$, $A_g = [0,1) \cup (1,+\infty)$ άρα $f \neq g$

• $A = A_f \cap A_g = [0,1) \cup (1,+\infty)$

• $g(x) = \dfrac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \dots = \dfrac{2(x+1)}{x-1} = f(x)$

οπότε $f = g$ στο $[0,1) \cup (1,+\infty)$

B2 • $A_{f\circ g} = \{x \in A_g \,/\, g(x) \in A_f\} \overset{*}{=} [0,1) \cup (1,+\infty)$

$* \quad g(x) \neq 1 \Rightarrow f(x) \neq 1 \Rightarrow x \neq -3$

$f(g(x)) = f(f(x)) = \dots = \dfrac{6x+2}{x+3}$

B3. $f'(x) = -\dfrac{4}{(x-1)^2} < 0$ άρα $f \searrow$ στο $(1,+\infty)$

• $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right) \overset{*}{=} (2,+\infty)$

$* \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} \cdot (2x+2) \underset{x-1>0}{=} +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$

▸ $g(x) = 1908 \Leftrightarrow f(x) = 1908$

• $1908 \in f(A)$ απο θετ $\exists\, x_0 \in (1,+\infty)$: $f(x_0) = 1908$

κ' $f \downarrow$ άρα το x_0 μοναδικό.

B4 $$\int_2^e f(x)\ln(x-1)\,dx = \int_2^e \frac{2x+2}{x-1}\ln(x-1)\,dx =$$

$$= \int_2^e \frac{2(x-1)+4}{x-1}\cdot \ln(x-1)\,dx = 2\int_2^e \ln(x-1)\,dx + 4\int_2^e \frac{1}{x-1}\ln(x-1)\,dx$$

$$= 2\int_2^e (x-1)'\ln(x-1)\,dx + 4\int_2^e (\ln(x-1))'\ln(x-1)\,dx$$

$$= 2\Big[(x-1)\ln(x-1)\Big]_2^e - 2\int_2^e 1\,dx + 4\left[\frac{\ln^2(x-1)}{2}\right]_2^e =$$

$$= 2\Big[(x-1)\ln(x-1)\Big]_2^e - 2\Big[x\Big]_2^e + 2\Big[\ln^2(x-1)\Big]_2^e =$$

$$= \dots = 2e - 2(e+1-2) + 2 = 4.$$

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Γ1 • Για $x=0$: $2f^3(0)+6f(0)-8=0 \Leftrightarrow (f(0)-1)(\underbrace{2f^2(0)+2f(0)+8}_{\Delta<0})=0$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(0)=1}$$

2	0	6	−8	1
↓	2	2	8	
2	2	8	0	

• Για $x=-1$: $2f^3(-1)+6f(-1)=0 \Leftrightarrow f(-1)(2f^2(-1)+6)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{f(-1)=0}$

Γ2 $6f^2(x)f'(x)+6f'(x)=6x^2+6 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{x^2+1}{f^2(x)+1}>0$ άρα $f \uparrow$

Γ3 Το $x_0=-1$ μοναδική ρίζα της f

$x>-1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>0$

$x<-1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Γ4 f συνεχής κ' $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $f(\mathbb{R})=(\lim_{x\to-\infty}f(x), \lim_{x\to+\infty}f(x))$

κ' επειδή $f(A)=\mathbb{R}$ τότε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

• $f^3(x)+3f(x)=x^3+3x+4 \Leftrightarrow f(x)(f^2(x)+3)=x^3+3x+4$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^3+3x+4}{f^2(x)+3} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x^3+3x+4}=\dfrac{1}{f^2(x)+3}$ οπότε

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3+3x+4}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f^2(x)+3}\overset{1/\infty}{=}0$

Γ5 Έστω $h(x)=(x+3)f(\eta\mu x+3)-(e^x-1)f(x)$

• h συνεχής στο $[-3,0]$

• $h(-3)=-(e^{-3}-1)f(-3)<0$ αφού $f(-3)<0$, $-3<-1$

• $h(0)=3f(3)>0$ αφού $f(3)>0$, $3>-1$

οπότε $h(-3)h(0)<0$ από Θ. Bolzano ...

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Γ1 f παρ/μη στο $[0,4]$ απο ΘΜΤ $\exists\, \xi \in (0,4)$: $f'(\xi_2) = \dfrac{f(4)-f(0)}{4}$

$\Leftrightarrow f'(\xi_2) = \dfrac{f(4)-1}{4}$. επειδη $2 \le f'(x) \le 5 \;\; \forall x \in [0,4]$ τοτε :

$2 \le f'(\xi_2) \le 5 \Leftrightarrow 2 \le \dfrac{f(4)-1}{4} \le 5 \Leftrightarrow 9 \le f(4) \le 21$

Γ2 Ειναι: $9 \le f(4) \le 21 \Leftrightarrow 10 \le f(4) + f(0) \le 22$

$\Leftrightarrow 5 \le \dfrac{f(4)+f(0)}{2} \le 11 \quad (1)$

▸ f συνεχης στο $[0,4]$ απο Θ.Μ.Ε.Τ εχει μια μεγιστη κ' μια ελαχιστη τιμη. Δηλ. $m \le f(0) \le M$

$$(+)\;\; m \le f(4) \le M$$

$$2m \le f(0) + f(4) \le 2M \Leftrightarrow m \le \frac{f(0)+f(4)}{2} \le M$$

αρα $\exists\, \xi \in [0,4]$: $f(\xi) = \dfrac{f(0)+f(4)}{2} \quad (2)$

Απο (1) κ' (2) $\Rightarrow 5 \le f(\xi) \le 11$.

Γ3 Θεωρουμε $g(x) = (f'(x))^2 - 6f'(x) + 3x$ στο $[0,4]$

• g συνεχης ως πραξεις συνεχων

• $g(0) = f'(0)(f'(0)-6) < 0$ αφου $2 \le f'(0) \le 5$

• $g(4) = \underbrace{(f'(4))^2 - 6f'(4) + 12}_{\Delta < 0} > 0$ οποτε $g(0)g(4) < 0$ Θ. Bolzano ...

Γ4 • $(x-2)f(x) + \dfrac{(x^2-4x)f'(x)}{2} = 2-x \Leftrightarrow (2x-4)f(x) + (x^2-4x)f'(x) + 2x-4 = 0$

$\Leftrightarrow \left((x^2-4x)f(x) + (x^2-4x) \right)' = 0$

▸ Θεωρουμε $K(x) = (x^2-4x)f(x) + (x^2-4x)$ στο $[0,4]$

$K(0) = K(4) = 0$ Θ. Rolle ...

ΖΗΤΗΜΑ Δ

Δ1 • $\left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2|x|}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow 2|x| \leq |x|^2+1 \Leftrightarrow (|x|-1)^2 \geq 0$ ισχυει

Δ2 $g'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$	

Δ3 • $\left|g(x)\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right| = |g(x)|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right| \leq |g(x)|$

$\Leftrightarrow -|g(x)| \leq g(x)\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} \leq |g(x)|$

• $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2+1} = \frac{0}{1} = 0$ αρα απο Κ.Π. $\lim_{x\to 0} g(x)\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} = 0$.

Δ4 • h παρ/τη στο 1 αρα κ' συνεχης στο 1.

$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2+\beta x+\gamma) = 1+\beta+\gamma\end{array}\right\} \beta+\gamma = 0$

$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\beta x+\gamma-1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 1^+}(2x+\beta) = 2+\beta \\ \lim_{x\to 1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)^2}{(x^2+1)(x-1)} = 0\end{array}\right.$

αρα $2+\beta = 0 \Rightarrow \underline{\beta = -2}$ οποτε $\underline{\gamma = 2}$

Δ5 πρέπει $\lambda \geq 0$ για να ορίζεται το $x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$

• Αν $\lambda > 0$:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \lambda^+} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}\right) = \lambda \cdot \eta\mu \frac{1}{\lambda} \\ \lim\limits_{x \to \lambda^-} f(x) = \dfrac{3\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda}{\lambda^2 + 1} \end{cases}$$

Επειδή f συνεχής στο λ τότε $\lambda \eta\mu \frac{1}{\lambda} = \dfrac{3\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda}{\lambda^2+1}$

$$\Leftrightarrow \lambda \eta\mu \frac{1}{\lambda} = \frac{3\lambda(\lambda^2+1) + 2\lambda^2}{\lambda^2+1} \Leftrightarrow \lambda \eta\mu \frac{1}{\lambda} = 3\lambda + \frac{2\lambda^2}{\lambda^2+1}$$

$$\overset{:\lambda>0}{\Leftrightarrow} \quad \eta\mu \frac{1}{\lambda} = 3 + g(\lambda)$$

Είναι από **Δ1** $-1 \leq g(\lambda) \leq 1 \overset{+3}{\Leftrightarrow} 2 \leq g(\lambda) + 3 \leq 4$

$\Leftrightarrow 2 \leq \eta\mu \frac{1}{\lambda} \leq 4 \rightarrow$ Άτοπο

άρα $\boxed{\lambda = 0.}$

• $f(x) = \begin{cases} x \eta\mu \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \dfrac{3x^3 + 2x^2 + 3x}{x^2+1}, & x \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3x^3 + 2x^2 + 3x}{x^2+1} = \dfrac{0}{1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x \eta\mu \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \left| x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x|$

$\downarrow 0 \qquad \downarrow$ κ.π. $0 \qquad \downarrow 0$

άρα όταν $\lambda = 0$ f συνεχής στο 0.