Θέμα Α

Α1 – δ , Α2 – β , Α3 – α , Α4 – γ , Α5 α – Λ , β – Λ , γ – Λ , δ – Λ , ε – Λ

Θέμα Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Για το σύστημα των δύο δίσκων ισχύει η ΑΔΣ αφού $\Sigma\tau_{εξ}=0$, οπότε:

$$\vec{L}_{ολ,αρχ}=\vec{L}_{ολ,τελ}\Rightarrow\vec{L}_1+\vec{L}_2=\vec{L}_{κοινή}\Rightarrow(+\uparrow)-L_1+L_2=L_{κοινή}\Rightarrow -I_{Δ_1}\omega_1+I_{Δ_2}\omega_2=I_{ολ}\omega_κ\Rightarrow$$

$$-I_{Δ_1}\omega_1+\frac{I_{Δ_1}}{2}2{,}5\omega_1=\left(I_{Δ_1}+I_{Δ_2}\right)\omega_κ\Rightarrow\frac{1}{4}I_{Δ_1}\omega_1=\frac{3}{2}I_{Δ_1}\omega_κ\Rightarrow\omega_κ=\frac{1}{6}\omega_1$$

Για τη ροπής της τριβής που ασκήθηκε στον δίσκο $Δ_1$ έχουμε:

$$\vec{\tau}_1=\frac{\Delta\vec{L}_1}{\Delta t}=\frac{\vec{L}_{1,τελ}-\vec{L}_{1,αρχ}}{\Delta t}=\frac{\vec{L}_{1,κ}-\vec{L}_1}{\Delta t}(+\uparrow)\Rightarrow$$

$$\tau_1=\frac{L_{1,κ}-(-L_1)}{\Delta t}=\frac{I_{Δ_1}\omega_κ+I_{Δ_1}\omega_1}{\Delta t}=\frac{I_{Δ_1}\omega_1/6+I_{Δ_1}\omega_1}{\Delta t}\Rightarrow\tau_1=\frac{7}{6}\frac{I_{Δ_1}\omega_1}{\Delta t}$$

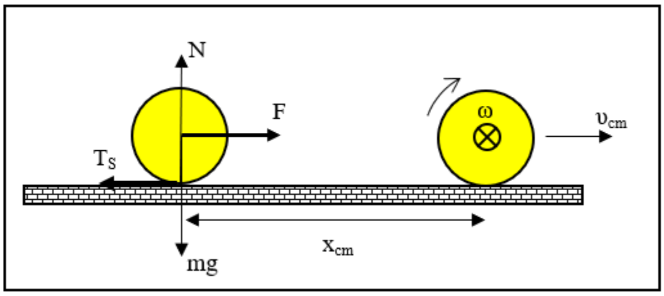
Β2. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Οι δυνάμεις που δέχονται οι εσωτερικές επιφάνειες των βάσεων των δοχείων έχουν ίσα μέτρα άρα:

$$F_1=F_2\Rightarrow p_1A_1=p_2A_2\Rightarrow p_1A_1=p_2 3A_1\Rightarrow p_1=3p_2\Rightarrow p_{atm}+\rho_1 gh_1=3\left(p_{atm}+\rho_2 gh_2\right)\Rightarrow$$

$$p_{atm}+2\rho_2 g\cdot 2h_2=3p_{atm}+3\rho_2 gh_2\Rightarrow\rho_2 gh_2=2p_{atm}\Rightarrow\rho_2=\frac{2p_{atm}}{gh_2}$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (β).



Εφαρμόζοντας ΘΕΕ έχουμε:

$K_{ολ,τελ}-K_{ολ,αρχ}=W_F\Rightarrow$

$K_{ολ,τελ}-0=W_F\Rightarrow K_{ολ,τελ}=W_F\ (1)$, η στατική τριβή στην κύλιση χωρίς ολίσθηση δεν παράγει έργο αφού κάθε φορά ασκείται σε διαφορετικό σημείο της περιφέρειας του τροχού και δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της. Επειδή το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι το ίδιο και για τους δύο τροχούς $W_F=F\cdot x_{cm}$, η ολική κινητική τους ενέργεια θα είναι ίδια άρα $K_{ολ(1)}=K_{ολ(2)}\Rightarrow K_{μτφ(1)}+K_{στρφ(1)}=K_{μτφ(2)}+K_{στρφ(2)}\ (2)$.

Εφαρμόζοντας τους θεμελιώδεις νόμους έχουμε:

ΘΝΜ: $\Sigma F_x=ma_{cm}\Rightarrow F-T_S=ma_{cm}\ (3)$

ΘΝΣ: $\Sigma\tau=Ia_{γων}\Rightarrow T_S R=I\frac{a_{cm}}{R}\Rightarrow T_S=\frac{I}{R^2}a_{cm}\ (4)$

$(3)+(4)\Rightarrow F=ma_{cm}+\frac{I}{R^2}a_{cm}\Rightarrow a_{cm}=\frac{F}{m+I/R^2}$ έχουμε $I_1<I_2\rightarrow a_{cm(1)}>a_{cm(2)}$

Από τις εξισώσεις κίνησης έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\upsilon_{cm}&=a_{cm}t\\ x_{cm}&=\frac{1}{2}a_{cm}t^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_{cm}=\frac{\upsilon_{cm}^2}{2a_{cm}}\Rightarrow\upsilon_{cm}=\sqrt{2x_{cm}a_{cm}}$$

οπότε $a_{cm(1)}>a_{cm(2)}\rightarrow\upsilon_{cm(1)}>\upsilon_{cm(2)}\rightarrow K_{μτφ(1)}=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm(1)}^2>K_{μτφ(2)}=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm(2)}^2\rightarrow K_{μτφ(1)}-K_{μτφ(2)}>0$

Από $(2)\Rightarrow K_{μτφ(1)}-K_{μτφ(2)}=K_{στρφ(2)}-K_{στρφ(1)}\rightarrow K_{στρφ(2)}-K_{στρφ(1)}>0\Rightarrow K_{στρφ(2)}>K_{στρφ(1)}$

Θέμα Γ

Γ1. Οι πηγές εκτελούν ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $y=0{,}4\cdot\eta\mu(8\pi t)\ S.I.$ οπότε $A=0{,}4m$ και $\omega=8\pi\frac{rad}{s}\rightarrow\omega=2\pi f\Rightarrow f=4Hz\rightarrow T=\frac{1}{f}=0{,}25s$. Το σημείο Μ στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ που ενώνει τις πηγές και ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_M=2\,s$ άρα: $\frac{d}{2}=\upsilon\cdot t_M\Rightarrow\upsilon=\frac{d}{2t_M}\Rightarrow\upsilon=2\frac{m}{s}$.

Επίσης από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε: $\upsilon=\lambda f\Rightarrow\lambda=\frac{\upsilon}{f}\Rightarrow\lambda=0{,}5m$.

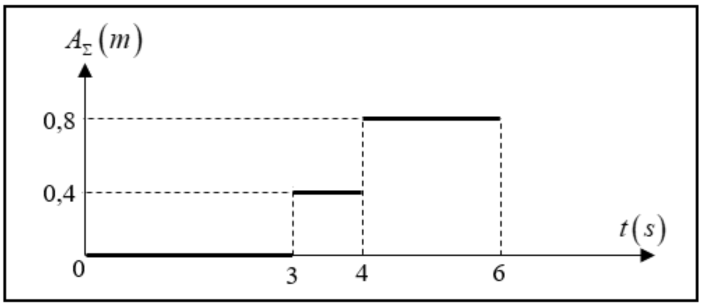
Γ2. Για το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ λόγω της συμβολής έχουμε:

$$A'_\Sigma=2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(r_1-r_2)}{\lambda}\right|=2\cdot0{,}4\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(8-6)}{0{,}5}\right|=2\cdot0{,}4\left|\sigma\upsilon\nu4\pi\right|\Rightarrow$$

$A'_\Sigma=0{,}8m$ άρα σημείο ενισχυτικής συμβολής.

Το πρώτο κύμα από την πηγή Π_2 φτάνει στο σημείο Σ τη χρονική στιγμή $t_{2\Sigma}=\frac{r_2}{\upsilon}=3s$, ενώ το δεύτερο κύμα από την πηγή Π_1 φτάνει στο σημείο Σ τη χρονική στιγμή $t_{1\Sigma}=\frac{r_1}{\upsilon}=4s$. Άρα για το πλάτος του σημείου Σ και την αντίστοιχη γραφική παράσταση $\left(A_\Sigma=f(t)\right)$ στο χρονικό διάστημα $0\le t\le 6\,s$ έχουμε:

$$A_\Sigma=\begin{cases}0 & 0\le t<3s\\ A=0{,}4m & 3s\le t<4s\\ 2A=0{,}8m & t\ge 4s\end{cases}$$



Γ3. Η εξίσωση απομάκρυνσης ταλάντωσης του σημείου Σ σε συνάρτηση με τον χρόνο μετά τη συμβολή των κυμάτων είναι:

$$y_{o\lambda(\Sigma)}=2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi(r_1-r_2)}{\lambda}\cdot\eta\mu2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right)=0{,}8\cdot\sigma\upsilon\nu4\pi\cdot\eta\mu2\pi(4t-14)\Rightarrow$$

$$y_{o\lambda(\Sigma)}=0{,}8\cdot\eta\mu(8\pi t-28\pi)\ S.I.$$

Γ4. Το σημείο Σ είναι σημείο ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος ταλάντωσης άρα είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής και ανήκει στην υπερβολή $\frac{r_1-r_2}{\lambda}=\frac{8-6}{0{,}5}=4\Rightarrow r_1-r_2=4\lambda\rightarrow N=4$.

Το σημείο Μ βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ που ενώνει τις πηγές, άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ και ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος οπότε $N=0$. Στο ευθύγραμμο τμήμα ΜΣ βρίσκονται τόσα ακίνητα σημεία όσα και οι υπερβολές ακυρωτικής συμβολής που το τέμνουν. Αυτές είναι οι $N'=0,1,\ 2,3$. Άρα τα ακίνητα σημεία είναι τέσσερα.

Γ5. Το σημείο Μ εκτελεί τις 12 πρώτες πλήρεις ταλαντώσεις σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 12T = 12 \cdot 0{,}25\,s \Rightarrow \Delta t = 3\,s$. Τα κύματα στο σημείο Μ συμβάλλουν ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή $t_{\mathrm{M}} = \dfrac{d/2}{\upsilon} = 2\,s$, άρα όταν θα έχει εκτελέσει τις 12 πρώτες πλήρεις ταλαντώσεις έχει περάσει χρόνος $\Delta t = 3\,s \Rightarrow t - t_{\mathrm{M}} = 3\,s \Rightarrow t - 2s = 3\,s \Rightarrow t = 5\,s$. Το σημείο Σ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_{2\Sigma} = \dfrac{r_2}{\upsilon} = 3s$ που φτάνει το πρώτο κύμα από την πηγή Π_2, ενώ η συμβολή ξεκινά όταν φτάνει το δεύτερο κύμα από την πηγή Π_1 τη χρονική στιγμή $t_{1\Sigma} = \dfrac{r_1}{\upsilon} = 4s$. Μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 5\,s$ το σημείο Σ έχει βρεθεί στην απομάκρυνση $y_\Sigma = +0{,}4m$ στο χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή $t_{2\Sigma} = \dfrac{r_2}{\upsilon} = 3s$ έως τη χρονική στιγμή $t = 5\,s$. Στο χρονικό διάστημα

Θέμα Δ

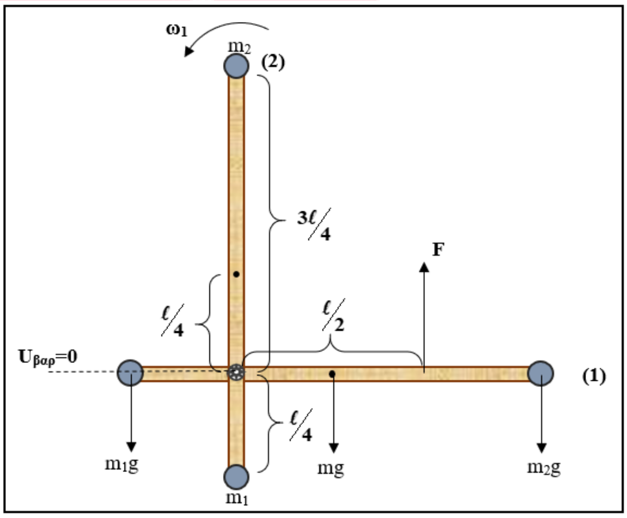
Δ1. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος δοκός – σημειακές μάζες, ως προς τον άξονα περιστροφής Ο τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = \tau_F + \tau_{m_1 g} - \tau_{mg} - \tau_{m_2 g} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = F\frac{\ell}{2} + m_1 g\frac{\ell}{4} - mg\frac{\ell}{4} - m_2 g\frac{3\ell}{4} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 2{,}74 Nm \odot$$

Δ2. Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής είναι:

$$I_{o\lambda} = I_{\rho\alpha\beta} + I_1 + I_2 \Rightarrow I_{o\lambda} = \left[\frac{1}{12}m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2\right] + m_1\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 + m_2\left(\frac{3\ell}{4}\right)^2 \Rightarrow$$

$$I_{o\lambda} = \frac{7}{48}m\ell^2 + m_1\frac{\ell^2}{16} + m_2\frac{9\ell^2}{16} \Rightarrow I_{o\lambda} = 5\,kg \cdot m^2$$



Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος δοκός – σημειακές μάζες τη στιγμή της κατάργησης της δύναμης $\vec{F}$ θα υπολογιστεί από την εφαρμογή του θεωρήματος έργου ενέργειας για τη στροφική κίνηση:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda(2)} - K_{\tau\varepsilon\lambda(1)} = W_F^{1\to 2} + W_{mg}^{1\to 2} + W_{m_1 g}^{1\to 2} + W_{m_2 g}^{1\to 2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega_1^2 - 0 = \tau_F \cdot \theta + U_{mg(1)} - U_{mg(2)} + U_{m_1 g(1)} - U_{m_1 g(2)} + U_{m_2 g(1)} - U_{m_2 g(2)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega_1^2 - 0 = F\frac{\ell}{2}\frac{\pi}{2} + 0 - mg\frac{\ell}{4} + 0 - \left(-m_1 g\frac{\ell}{4}\right) + 0 - m_2 g\frac{3\ell}{4} \Rightarrow \omega_1 = 2\frac{rad}{s} \odot$$

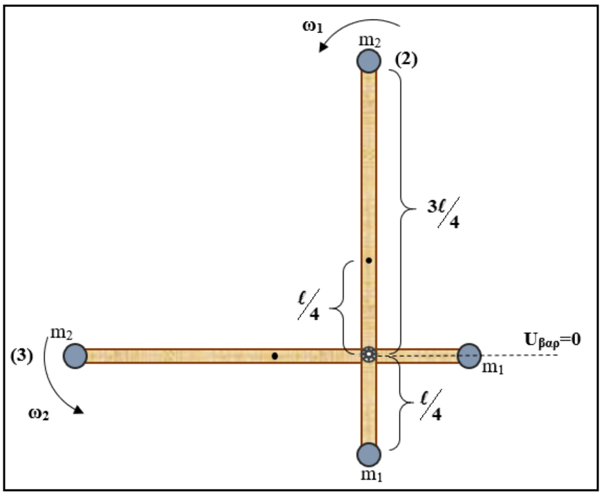
Δ3. Ο ρυθμό μεταβολής κινητικής ενέργεια του συστήματος δοκός – σημειακές μάζες τη στιγμή που η δοκός διέρχεται για πρώτη φορά από την οριζόντια θέση μετά την κατάργηση της δύναμης είναι:

$$\frac{dK_{(3)}}{dt} = \Sigma\tau_{(3)} \cdot \omega_2 \ \text{όπου}\ \Sigma\tau_{(3)} = \tau_{m_2 g} - \tau_{m_1 g} + \tau_{mg} \Rightarrow \Sigma\tau_{(3)} = m_2 g\frac{3\ell}{4} - m_1 g\frac{\ell}{4} + mg\frac{\ell}{4} \Rightarrow$$

$$\Sigma\tau_{(3)} = 10 Nm \odot$$

Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος δοκός – σημειακές μάζες τη στιγμή που η ράβδος γίνεται οριζόντια στη θέση (3) θα υπολογιστεί από την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας:

$$E_{\mu\eta\chi(2)} = E_{\mu\eta\chi(3)} \Rightarrow K_{(2)} + U_{mg(2)} + U_{m_1 g(2)} + U_{m_2 g(2)} =$$
$$K_{(3)} + U_{mg(3)} + U_{m_1 g(3)} + U_{m_2 g(3)} \Rightarrow$$



$$\frac{1}{2} I_{o\lambda}\omega_1^2 + mg\frac{\ell}{4} - m_1 g\frac{\ell}{4} + m_2 g\frac{3\ell}{4} = \frac{1}{2} I_{o\lambda}\omega_2^2 + 0 + 0 + 0 \Rightarrow \omega_2 = 2\sqrt{2}\,\frac{rad}{s} \odot$$

Άρα $\frac{dK_{(3)}}{dt} = \Sigma\tau_{(3)} \cdot \omega_2 = 10 \cdot 2\sqrt{2}\,\frac{J}{s} \Rightarrow \frac{dK_{(3)}}{dt} = 20\sqrt{2}\,\frac{J}{s}$

Δ4. Τα μέτρα των δυνάμεων $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ που δέχονται οι σημειακές μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα από τη δοκό θα υπολογιστούν από την κεντρομόλο δύναμη που δέχεται το καθένα.

Για μάζα $m_1 \rightarrow \Sigma F_{1y} = m_1 a_{\kappa 1} \Rightarrow$

$$m_1 g - F_1 = m_1 \frac{\upsilon_{\gamma\rho 1}^2}{r_1} \Rightarrow F_1 = m_1 g - m_1 \frac{\ell}{4} \cdot \omega_3^2 \ (1)$$

Για μάζα $m_2 \rightarrow \Sigma F_{2y} = m_2 a_{\kappa 2} \Rightarrow$

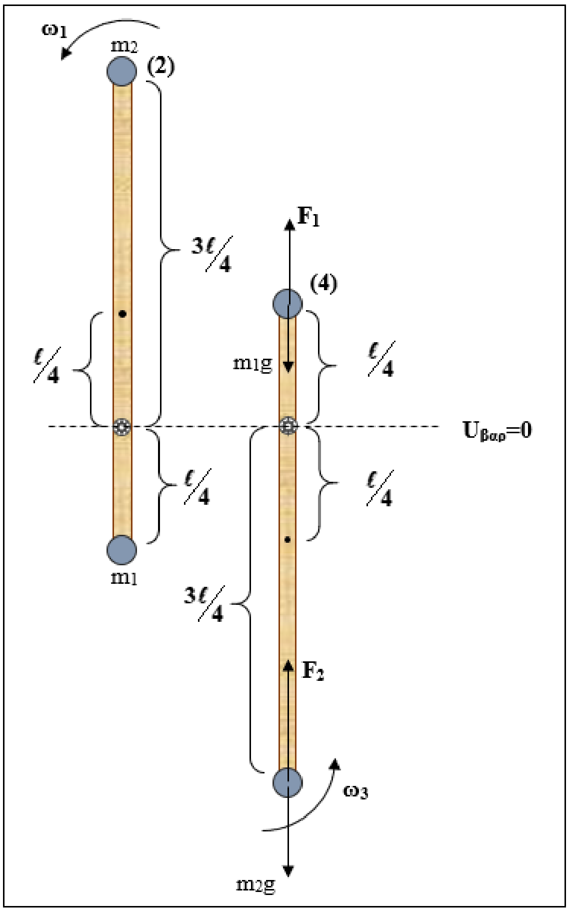
$$F_2 - m_2 g = m_2 \frac{\upsilon_{\gamma\rho 2}^2}{r_2} \Rightarrow F_2 = m_2 g + m_2 \frac{3\ell}{4} \cdot \omega_3^2 \ (2)$$

Η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος δοκός – σημειακές μάζες τη στιγμή που η ράβδος γίνεται κατακόρυφη στη θέση (4) θα υπολογιστεί από την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας:

$$E_{\mu\eta\chi(2)} = E_{\mu\eta\chi(4)} \Rightarrow K_{(2)} + U_{mg(2)} + U_{m_1 g(2)} + U_{m_2 g(2)} =$$
$$K_{(4)} + U_{mg(4)} + U_{m_1 g(4)} + U_{m_2 g(4)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I_{o\lambda}\omega_1^2 + mg\frac{\ell}{4} - m_1 g\frac{\ell}{4} + m_2 g\frac{3\ell}{4} =$$
$$\frac{1}{2} I_{o\lambda}\omega_3^2 - mg\frac{\ell}{4} + m_1 g\frac{\ell}{4} - m_2 g\frac{3\ell}{4} \Rightarrow$$

$$\omega_3 = 2\sqrt{3}\,\frac{rad}{s} \odot$$



Με αντικατάσταση στις σχέσεις (1) και (2) έχουμε για τα μέτρα των δυνάμεων:

$(1) \Rightarrow F_1 = 16N$ και $(2) \Rightarrow F_2 = 28N$ οπότε ο λόγος των μέτρων τους είναι: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{16}{28} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{4}{7}$