

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
(ΓΜ17)**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 7/11/2020

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : « Κάθε συνάρτηση έχει ακριβώς ένα σημείο τομής με την εφαπτομένη της »

α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση ;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

β) Αν $f(x) = a^x$, $a > 0$, τότε ισχύει $(a^x)' = xa^{x-1}$.

γ) Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή : αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

δ) Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει : $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in f(A)$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in A$.

ε) Η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .

Μονάδες : 7 – 4 – 4 – 10

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει :

- Η εφαπτομένη της Cf στο σημείο $A(0,1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\eta) : y = \frac{1}{2}x + 3$

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{2x+2}{x+2}$, $x \neq -2$.

B2. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την αντιστροφή f^{-1} .

B3. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

B4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2,-1)$

Μονάδες : 4 – 8 – 8 – 5

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \lambda x$, $x \in \mathbb{R}$, οπού λ σταθερός πραγματικός αριθμός και το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να δείξετε ότι $\lambda = -1$.

Γ2. Να βρείτε τα όρια: **i.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ και **ii.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x]$.

Γ3. Να αποδειχθεί ότι :

$\alpha) x^2 + 2x + 2 > (x + 1)^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$\beta)$ Να αποδείξετε ότι $f(x) > -2x - 1$ για $x < -1$.

Γ4. Να βρείτε την $f'(x)$ και την $f''(x)$.

Μονάδες : 6 – 5 – 6 – 8

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει :

- $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- f γνησίως μονότονη στο \mathbb{R}
- Η C_f διέρχεται από τα σημεία $M(1,1)$ και $B(2, e^\alpha + e^{-\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και $h(x) = x^2 - 3x + 3$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $(1,1)$.

Δ2. α) Να δείξετε ότι $g(x) + g(\frac{1}{x}) \geq 2$ για κάθε $x > 0$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = e^x$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

Δ4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $\Gamma(x, f^{-1}(x))$, $\Delta(f^{-1}(x), x)$ των παραγωγισιμων συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα και ισχύει $(f^{-1})'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων f^{-1} και f στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

Δ5. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) \cdot f(\sin x + 2))$.

Μονάδες : 5 x 5