

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 15-11-2020

Θέμα Α

A1 Να αποδείξετε ότι $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A2 Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού x .

A3 Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με ένα (Σ) αν είναι σωστές ή με ένα (Λ) αν είναι λανθασμένες.

(α') Αν $x > 2$ τότε $x^2 > 4$.

(β') Για κάθε φυσικό αριθμό ν και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$x < y \iff x^\nu < y^\nu$$

(γ') Δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε να ισχύει $|x - 1| + |x + 2| = 0$.

(δ') Ισχύει $|x| \geq -x$ και $|x| \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ε') Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία $x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$.

(Μονάδες: 7 – 3 – 15)

Θέμα Β

B1 (α') Να αποδείξετε ότι $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα.

(β') Αν $2 < x < 5$ και $B = 2|x - 2| - 3|5 - x|$ να αποδείξετε ότι $B = 5x - 19$.

(Μονάδες : 6 – 4)

B2 (α') Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2|\alpha\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(β') Να βρεθούν οι αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει $2x^2 + y^2 + 9 = 2x(3 - y)$.

(γ') Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

(α') $A = |3 - \pi| + |\pi - 4|$

(β') $B = |-x^2 - 1| - |x^2 + 5|$

(γ') $\Gamma = |x^2 - 4x + 4| - |x^2 - 2x + 3|$

(Μονάδες: 6 – 6 – 3)

Θέμα Γ

Γ1 Να αποδειχθεί ότι $x|y| + |x||y| \geq |x|y + xy$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Γ2 Δίνονται οι παραστάσεις $K = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1}$ και $M = \frac{x^2 + 4|x| + 4}{|x| + 2}$. Αφού απλοποιήσετε τις παραστάσεις K, M να αποδείξετε ότι $K - M = -3$

Γ3 Αν για τους αριθμούς x, y ισχύει $x - y = 8$ να αποδειχθεί ότι:

(α') $|3x - y| + |2x - 4y| \geq 40$.

(β') $xy \geq -16$.

(Μονάδες: 8 – 7 – 4 – 6)

Θέμα Δ

Δ1 Δίνεται η παράσταση $A = |2\beta - 4| - |3\alpha - 2\beta - 4|$ όπου $\alpha < 2 < \beta$. Να αποδειχθεί ότι $A = 3\alpha - 8$.

Δ2 Για τους αριθμούς x, y ισχύει $1 < x < 3$ και $-4 < y < -2$. Αν

$$F = |x^2 - xy + y^2| + |xy|$$

τότε:

(α') Δείξτε ότι $2 < -xy < 12$.

(β') Δείξτε ότι $3 < x - y < 7$.

(γ') Δείξτε ότι $F = (x - y)^2$ και στη συνέχεια $9 < F < 49$.

Δ3 Έστω $G = ||x - 1| - x + 1| + ||x| + x|$. Να απλοποιηθεί η παράσταση G .

(Μονάδες: 5 – 5 – 5 – 5 – 5)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!