# Λύσεις Διαγωνίσματος Μαθηματικών Β' Λυκείου: 15/11/2020

## ΘΕΜΑ Α'

**Α1** i) Έχουμε: $\vec{BK} = 2\vec{K\Gamma} \Leftrightarrow \vec{AK}-\vec{AB} = 2\cdot(\vec{A\Gamma}-\vec{AK}) \Leftrightarrow \vec{AK}-\vec{AB}=2\vec{A\Gamma}-2\vec{AK}$

$$\Leftrightarrow 3\vec{AK} = 2\vec{A\Gamma}+\vec{AB} \Leftrightarrow \boxed{\vec{AK}=\frac{2}{3}\vec{A\Gamma}+\frac{1}{3}\vec{AB}}$$

ii) Αφού M: μέσο του BK θα έχουμε:

$$\vec{AM} = \frac{\vec{AB}+\vec{AK}}{2} = \frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AK} \overset{(i)}{=} \frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{A\Gamma}+\frac{1}{3}\vec{AB}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{A\Gamma}+\frac{1}{6}\vec{AB} \Leftrightarrow \boxed{\vec{AM}=\frac{2}{3}\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{A\Gamma}}$$

iii) Είναι $\vec{v} = \vec{AM}+\vec{A\Gamma} = \frac{2}{3}\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{A\Gamma}+\vec{A\Gamma} = \frac{2}{3}\vec{AB}+\frac{4}{3}\vec{A\Gamma} =$

$$= 2\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{AB}+\frac{2}{3}\vec{A\Gamma}\right) \Leftrightarrow \vec{v} = 2\cdot\vec{AK}$$, άρα $\boxed{\vec{v} \parallel \vec{AK}}$

**Α2** i) Έχουμε: $2\vec{A\Gamma}-6\vec{AB}-5\vec{B\Delta} = \vec{\Delta\Gamma}-3\vec{A\Delta}$

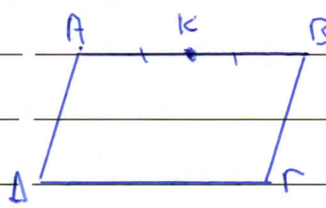
$\Leftrightarrow 2\cdot(\vec{AB}+\vec{B\Gamma})-6\vec{AB}-5\cdot(\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}) = \vec{\Delta\Gamma}-3\cdot(\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta})$

$\Leftrightarrow 2\vec{AB}+2\vec{B\Gamma}-6\vec{AB}-5\vec{B\Gamma}-5\vec{\Gamma\Delta} = \vec{\Delta\Gamma}-3\vec{AB}-3\vec{B\Gamma}-3\vec{\Gamma\Delta}$

$\Leftrightarrow -4\vec{AB}-\cancel{3\vec{B\Gamma}}+5\vec{\Delta\Gamma} = \vec{\Delta\Gamma}-3\vec{AB}-\cancel{3\vec{B\Gamma}}+3\vec{\Delta\Gamma}$

$\Leftrightarrow 5\vec{\Delta\Gamma}-\vec{\Delta\Gamma}-3\vec{\Delta\Gamma} = -3\vec{AB}+4\vec{AB}$

$\Leftrightarrow \vec{\Delta\Gamma} = \vec{AB}$, άρα ΑΒΓΔ: #




ii) Έχουμε: $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma} = \vec{M\Delta}$, θεωρούμε K: μέσο AB

$\Leftrightarrow 2\cdot\vec{MK}+\vec{M\Delta}+\vec{\Delta\Gamma} = \vec{M\Delta}$

$\Leftrightarrow 2\vec{MK}+\vec{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\vec{MK}+2\cdot\vec{KB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{MK}+\vec{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv B$

## ΘΕΜΑ Β

**Β1** Είναι: $\vec{u} = (3x-2\psi, x+\psi) + 3\vec{i} - \vec{j} = (3x-2\psi, x+\psi) + 3\cdot(1,0) - (0,1)$

$= (3x-2\psi, x+\psi) + (3,0) + (0,-1) \Leftrightarrow \vec{u} = (3x-2\psi+3, x+\psi-1)$

Είναι: $\vec{v} = (x+\psi, 5x+4\psi) - \vec{i} + \vec{j} = (x+\psi, 5x+4\psi) - (1,0) + (0,1)$

$= (x+\psi, 5x+4\psi) + (-1,0) + (0,1) \Leftrightarrow \vec{v} = (x+\psi-1, 5x+4\psi+1)$

Πρέπει: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-2\psi+3 = x+\psi-1 \\ x+\psi-1 = 5x+4\psi+1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-3\psi = -4 \\ 4x+3\psi = -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -1 \\ \psi = \frac{2}{3} \end{array}}$

**Β2** Έστω $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{a}$, οπότε $\vec{v} = \lambda\vec{a}$ με $\lambda < 0$

Άρα $|\vec{v}| = |\lambda\vec{a}| \Leftrightarrow 4\sqrt{5} = |\lambda|\,|\vec{a}| \Leftrightarrow 4\sqrt{5} = |\lambda|\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{5} = |\lambda|\cdot\sqrt{5} \Leftrightarrow |\lambda| = 4 \overset{\lambda<0}{\Longleftrightarrow} \lambda = -4$

Άρα $\vec{v} = -4\vec{a} = -4(2,-1) \Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = (-8,4)}$

**Β3** i) Είναι: $\vec{a}+\vec{\beta} = (\lambda, 1-\lambda) + (\lambda+1, 2) = (2\lambda+1, 3-\lambda)$

και $\vec{\gamma} = (6,-10)$

Έχουμε: $\vec{a}+\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma} \Leftrightarrow \det(\vec{a}+\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2\lambda+1 & 3-\lambda \\ 6 & -10 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -10\cdot(2\lambda+1) - 6(3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow -20\lambda - 10 - 18 + 6\lambda = 0$

$\Leftrightarrow -14\lambda = 28 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -2}$

ii) Για $\lambda = -2$ προκύπτουν: $\vec{a} = (-2,3)$ και $\vec{\beta} = (-1,2)$

Είναι: $5\vec{a} - 6\vec{\beta} = 5(-2,3) - 6(-1,2) = (-10,15) + (6,-12) = (-4,3)$

Άρα $|5\vec{a} - 6\vec{\beta}| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \boxed{|5\vec{a} - 6\vec{\beta}| = 5}$

iii) Είναι: $\vec{v} = 3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{v} = 3\cdot(0,1) \Leftrightarrow \vec{v} = (0,3)$

Έστω: $\vec{v} = \mu\cdot\vec{a} + \omega\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow (0,3) = \mu(-2,3) + \omega(-1,2) \Leftrightarrow (0,3) = (-2\mu-\omega, 3\mu+2\omega)$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -2\mu-\omega = 0 \\ 3\mu+2\omega = 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \omega = -2\mu \\ 3\mu + 2\cdot(-2\mu) = 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \omega = 6 \\ \mu = -3 \end{array}\right\}$ άρα $\boxed{\vec{v} = -3\vec{a} + 6\vec{\beta}}$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

# ΘΕΜΑ Γ

**Γ1** Έχουμε: $\psi^2-2x=x^2+1 \Leftrightarrow \psi^2=x^2+2x+1 \Leftrightarrow \psi^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow |\psi|=|x+1|$
$\Leftrightarrow \boxed{\psi=x+1}$ ή $\boxed{\psi=-x-1}$

Έχουμε: $\left.\begin{matrix}\psi=x+1\\ \psi=-x-1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\psi=x+1\\ x+1=-x-1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\psi=x+1\\ 2x=-2\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\psi=0\\ x=-1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{A(-1,0)}$

**Γ2** i) $\left.\begin{matrix}\sqrt{2x+1}+\sqrt{\psi-3}=5\\ \sqrt{2x+1}-\sqrt{4(\psi-3)}=-1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\sqrt{2x+1}+\sqrt{\psi-3}=5\\ \sqrt{2x+1}-2\sqrt{\psi-3}=-1\end{matrix}\right\}$ $\quad 2x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$, $\quad \psi-3\geq 0 \Leftrightarrow \psi\geq 3$

Θέτουμε $\sqrt{2x+1}=\alpha\geq 0$, $\sqrt{\psi-3}=\beta\geq 0$

οπότε το σύστημα γίνεται:

$\left.\begin{matrix}\alpha+\beta=5\\ \alpha-2\beta=-1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\alpha=5-\beta\\ 5-\beta-2\beta=-1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\alpha=5-\beta\\ -3\beta=-6\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\alpha=3\\ \beta=2\end{matrix}\right.$

Άρα: $\left.\begin{matrix}\sqrt{2x+1}=3\\ \sqrt{\psi-3}=2\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}2x+1=9\\ \psi-3=4\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}x=4\\ \psi=7\end{matrix}\right\}$ άρα $\boxed{(x,\psi)=(4,7)}$

ii) $\left.\begin{matrix}x^3-\psi^3=19\\ x-\psi=1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}(x-\psi)(x^2+x\psi+\psi^2)=19\\ x-\psi=1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}x^2+x\psi+\psi^2=19\\ x-\psi=1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}x^2+x\psi+\psi^2=19 & (1)\\ x=\psi+1 & (2)\end{matrix}\right\}$

Από $(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} (\psi+1)^2+(\psi+1)\psi+\psi^2=19$

$\Leftrightarrow \psi^2+2\psi+1+\psi^2+\psi+\psi^2=19$

$\Leftrightarrow 3\psi^2+3\psi-18=0$

$\Leftrightarrow \psi^2+\psi-6=0 \Leftrightarrow \psi=-6$ ή $\psi=1$

- Αν $\psi=-6$ από $(2) \Leftrightarrow x=-6+1 \Leftrightarrow x=-5$ άρα $\boxed{(x,\psi)=(-5,-6)}$
- Αν $\psi=1$ από $(2) \Leftrightarrow x=1+1 \Leftrightarrow x=2$ άρα $\boxed{(x,\psi)=(2,1)}$

Γ3 i) Για να εφάπτεται η ευθεία στον κύκλο πρέπει να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, δηλ. το παρακάτω (Σ) πρέπει να έχει μία μόνο λύση.

$$\left.\begin{aligned} \psi &= 3x+\lambda \quad (1) \\ x^2+\psi^2 &= 10 \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

Από $(2) \overset{(1)}{\Longrightarrow} x^2+(3x+\lambda)^2=10 \Leftrightarrow x^2+9x^2+6\lambda x+\lambda^2=10$

$\Leftrightarrow 10x^2+6\lambda x+\lambda^2-10=0 \quad (3)$

Είναι $\Delta = 36\lambda^2-40(\lambda^2-10) = 36\lambda^2-40\lambda^2+400 = -4\lambda^2+400$

Η (3) πρέπει να έχει μοναδική λύση, οπότε πρέπει:

$\Delta=0 \Leftrightarrow -4\lambda^2+400=0 \Leftrightarrow 4\lambda^2=400 \Leftrightarrow \lambda^2=100 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=\pm 10}$

ii) Για $\lambda=10$, το (Σ) γίνεται

$$\left.\begin{aligned} \psi &= 3x+10 \\ x^2+\psi^2 &= 10 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \psi &= 3x+10 \\ x^2+(3x+10)^2 &= 10 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \psi &= 3x+10 \\ 10x^2+60x+90 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \psi &= 3x+10 \\ x^2+6x+9 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \psi &= 3x+10 \\ (x+3)^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \psi &= 1 \\ x &= -3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \boxed{(x,\psi)=(-3,1)}$$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

## ΘΕΜΑ Δ

Δ1 i) Έχουμε: $f(x) = 2x^2 - 12x + 22 = 2x^2 - 12x + 18 + 4 =$

$= 2\cdot(x^2 - 6x + 9) + 4 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 2\cdot(x-3)^2 + 4}$

ii) Έχουμε: $g(x) = 2x^2$

$f(x) = g(x-2) + 4$

Άρα η $C_f$ προκύπτει από 2 διαδοχικές μετατοπίσεις της $C_g$

→ μία οριζόντια προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες

→ μια κατακόρυφη προς τα πάνω κατά 4 μονάδες

Δ2 i) Έχουμε: $f(1) = -3$ και $f(5) = -4$

άρα έχουμε ότι: $1 < 5$ και $f(1) > f(5)$

και επειδή η $f$ είναι γνησίως μονότονη, τότε $\boxed{f \searrow}$

ii) Αφού η $f$ είναι περιττή, τότε: $f(-1) = 3$ και $f(-5) = 4$

Έχουμε: $f(f(x)-2) > 4 \Leftrightarrow f(f(x)-2) > f(-5) \overset{f\searrow}{\Longleftrightarrow} f(x) - 2 < -5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) < -3 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} \boxed{x > 1}$

iii) Έστω: $f(x^2 - 2|x|) \leq 3 \Leftrightarrow f(x^2 - 2|x|) \leq f(-1) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x^2 - 2|x| \geq -1$

$\Leftrightarrow |x|^2 - 2|x| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 \geq 0$ ισχύει

iv) Αφού $f$ περιττή: $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

για $x = 0$ : $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

Άρα: $\Pi = f(0) + f(-\sqrt{27}) + f(3\sqrt{3}) = 0 + f(-3\sqrt{3}) + f(3\sqrt{3}) =$

$= -f(3\sqrt{3}) + f(3\sqrt{3}) \Leftrightarrow \boxed{\Pi = 0}$