Λύσεις Διαγωνίσματος Α' Λυκείου (23/02/20)

Θέμα Α

Α1 Θεωρία σχολικό σελ ~~..~~ 107 και 109

Α2 Λάθος. Επειδή $0x \le f$ αδύνατη το $f<0$.
Οπότε $fx \le 3f \Leftrightarrow x \ge 3$

Α3 (α)

Α4 (i) Λ (ii) Σ (iii) Λ (iv) Λ (v) Σ

Θέμα Β

Β1 (i) Εν Δυνάμει σελ 102 παράδειγμα 13
(ii) Εν Δυνάμει σελ 103 παράδειγμα 17
(iii) Εν Δυνάμει σελ 95 παράδειγμα 3

Β2 (i) Εν Δυνάμει σελ 131 Παράδειγμα 3

(ii) $\dfrac{x^6-7x^3-8}{x^2-x-2}$

$x^6-7x^3-8 \to$ Θέτουμε $x^3=\omega$. Οπότε γίνεται
$\omega^2-7\omega-8$

$\Delta = 49+32 = 81$, $\omega_{1,2} = \dfrac{7\pm 9}{2} \begin{cases} 8 \\ -1 \end{cases}$

Άρα $\omega^2-7\omega-8 = (\omega-8)(\omega+1)$

Όπως $\omega = x^3$. Άρα

$$\frac{x^6-7x^3-8}{x^2-x-2} = \frac{(x^3-8)(x^3+1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+1)}}$$

$$= (x^2+2x+4)(x^2-x+1)$$

B3 $\quad 9 < x^2 < 4x+3$

$x^2 > 9$ και $x^2 < 4x+3$

$\Leftrightarrow |x| > 3$

$\Leftrightarrow x > 3$ ή $x < -3$

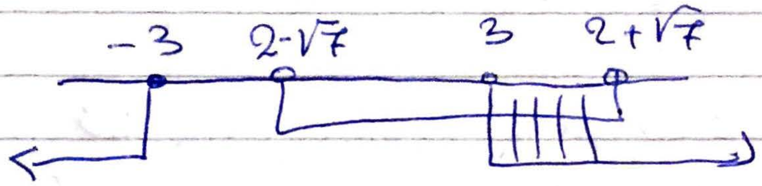
$x^2 - 4x - 3 < 0$

$\Delta = 16 + 12 = 28$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} \begin{cases} 2+\sqrt{7} \\ 2-\sqrt{7} \end{cases}$$

	$2-\sqrt{7}$		$2+\sqrt{7}$	
+	|	−	|	+

<u>Συναλήθευση</u>



Άρα $x \in (3, 2+\sqrt{7})$

Θέμα Γ

Γ1 (i) Εν Δυνάμει σελ 128 παράδειγμα 10.
(ii) Εν Δυνάμει σελ 133 παράδειγμα 5

Γ2 Εν Δυνάμει σελ 134 παράδειγμα 6.

Γ3 $-x^2+2x-3<0$ και $x^2-x-20\leq 0$

$\Delta=4-12=-8$.
Άρα ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

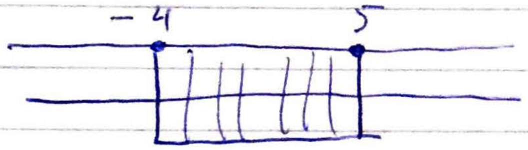
$\Delta=81$

$x_{1,2}=\frac{1\pm 9}{2}$ ⟨ 5, -4

x		-4		5	
x^2-x-20	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $-4\leq x\leq 5$

Συναλήθευση



Άρα $x\in[-4,5]$

Θέμα Δ

Δ1 (i) $x^2-\lambda x+1=0$ (1)

$\Delta=\lambda^2-4$. Για να έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει $\Delta>0 \Leftrightarrow \lambda^2-4>0$
$\Leftrightarrow \lambda^2>4 \Leftrightarrow |\lambda|>2 \Leftrightarrow \lambda>2$ ή $\lambda<-2$.

(ii) Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης και έστω $x_1=\rho$.
Ισχύει ότι $P=x_1\cdot x_2=1 \Leftrightarrow \rho\cdot x_2=1 \Leftrightarrow x_2=\frac{1}{\rho}$.

Άρα και το $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

(iii) Έχουμε ότι $x_1\cdot x_2=1>0$ Άρα επειδή $P>0$ οι ρίζες είναι ομόσημοι αριθμοί.
Επίσης $S=x_1+x_2=\frac{-\lambda}{1}=\lambda=2$. Επειδή και $\lambda>0$ οι ρίζες είναι θετικοί αριθμοί.

(iv) Έστω $x_1=\rho$ και $x_2=\frac{1}{\rho}$ (Το ίδιο και αν $x_1=\frac{1}{\rho}$ και $x_2=\rho$)

Τότε $x_1+4x_2\geq 4 \Leftrightarrow \rho+\frac{4}{\rho}\geq 4 \overset{\rho>0}{\Leftrightarrow} \rho^2+4\geq 4\rho$

$\Leftrightarrow \rho^2-4\rho+4\geq 0 \Leftrightarrow (\rho-2)^2\geq 0 \rightarrow$ Ισχύει.

<u>Δ2</u> Έχουμε x^2-2x-8. Βρίσκουμε το πρόσημο του τριωνύμου.

$\Delta=4+32=36 \qquad x_{1,2}=\frac{2\pm 6}{2} \begin{array}{l} 4 \\ -2 \end{array}$

Τότε

x		-2		4	
x^2-2x-8	$+$	0	$-$	0	$+$

~~Επ~~ $k=-\frac{8889}{4444}=-\frac{8888}{4444}-\frac{1}{4444}=-2-\frac{1}{4444}<-2$.

Επειδή $k<-2$ το k^2-2k-8 είναι θετικός αριθμός.