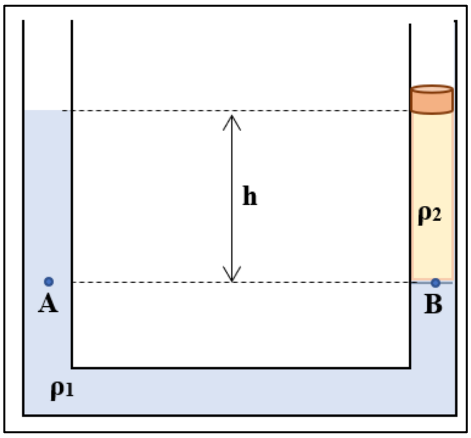
Θέμα Α

Α1 – δ , Α2 – γ , Α3 – γ , Α4 – β , Α5 α – Σ, β – Λ , γ – Λ , δ – Λ , ε – Σ

Θέμα Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (γ).



Η πίεση στο έμβολο είναι $p_{\varepsilon\mu\beta} = p_{atm} + \frac{w}{A}(1)$.

Η πίεση στο σημείο Β είναι $p_{\mathrm{B}} = p_{\varepsilon\mu\beta} + \rho_2 gh$.

Η πίεση στο σημείο Α είναι $p_{\mathrm{A}} = p_{atm} + \rho_1 gh$.

Τα σημείο Α και Β βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο οπότε έχουν την ίδια πίεση, άρα

$$p_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{B}} \Rightarrow p_{atm} + \rho_1 gh = p_{\varepsilon\mu\beta} + \rho_2 gh \xrightarrow{(1)}$$

$$p_{atm} + \rho_1 gh = p_{atm} + \frac{w}{A} + \rho_2 gh \Rightarrow 1{,}2\rho_2 gh = \frac{w}{A} + \rho_2 gh \Rightarrow$$

$$\frac{w}{A} = 0{,}2\rho_2 gh \Rightarrow w = 0{,}2\rho_2 ghA$$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Για το μήκος του σύρματος ℓ και την ακτίνα του κυκλικού αγωγού r ισχύει $\ell = 2\pi r$. Ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα έντασης I οπότε δημιουργείται μαγνητικό πεδίο η ένταση του οποίου στο κέντρο του έχει μέτρο $B = k_\mu \frac{2\pi I}{r}$. Με το ίδιο σύρμα μήκους ℓ κατασκευάζουμε έναν νέο κυκλικό αγωγό που αποτελείται από πέντε σπείρες της ίδιας ακτίνας r' οπότε για το μήκος του σύρματος ℓ ισχύει $\ell = N \cdot 2\pi r' = 5 \cdot 2\pi r'$. Ισχύει $2\pi r = 5 \cdot 2\pi r' \Rightarrow r' = \frac{r}{5}$. Ο νέος κυκλικός αγωγός αφού τον συνδέουμε στην ίδια ηλεκτρική πηγή θα διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα έντασης I. Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου B' στο κέντρο του νέου κυκλικού αγωγού θα είναι:

$$B' = N \cdot k_\mu \frac{2\pi I}{r'} = 5 \cdot k_\mu \frac{2\pi I}{r/5} = 25 \cdot k_\mu \frac{2\pi I}{r} \Rightarrow B' = 25B.$$

Β3. Ι. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η κρούση είναι κεντρική ελαστική άρα ισχύουν οι τύποι:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{m_1}{3m_1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{\upsilon_1}{3}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{4m_1}{3m_1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{4\upsilon_1}{3}$$

Άρα $\upsilon_2' = 4\upsilon_1'$

ΙΙ. Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η ταχύτητα της σφαίρας m_1 πριν την κρούση θα βρεθεί με ΘΜΚΕ:

$$K_{1\tau\varepsilon\lambda} - K_{1\alpha\rho\chi} = W_{m_1 g} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - 0 = m_1 g h_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = m_1 g\left(\ell - \ell\sigma\upsilon\nu\varphi\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_1^2 = g\left(\ell - \frac{\ell}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\upsilon_1^2 = g\left(\ell - \frac{\ell}{2}\right) \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{g\ell}$$

Άρα ταχύτητα της σφαίρας m_2 αμέσως μετά την κρούση είναι: $\upsilon_2' = \frac{4\upsilon_1}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{g\ell}$

Το μέγιστο ύψος h_2 στο οποίο φτάνει η σφαίρα m_2 μετά την κρούση θα βρεθεί με ΘΜΚΕ:

$$K_{2\tau\varepsilon\lambda} - K_{2\alpha\rho\chi} = W_{m_2 g} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -m_2 g h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{\upsilon_2'^2}{2g} = \frac{16}{9}\frac{\upsilon_1^2}{2g} = \frac{\upsilon_2'^2}{2g} = \frac{16}{9}\frac{g\ell}{2g} \Rightarrow h_2 = \frac{8\ell}{9}$$

Για τη μέγιστη γωνία εκτροπής θ που θα σχηματίσει το νήμα της σφαίρας (2) με την κατακόρυφο μετά την κρούση ισχύει: $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{2\ell - h_2}{2\ell} = \dfrac{2\ell - \frac{8\ell}{9}}{2\ell} = \dfrac{10\ell}{18\ell} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{5}{9}$

<u>Θέμα Γ</u>

Γ1. Η συνάντηση των δύο σωμάτων γίνεται στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ1 όταν διέρχεται από αυτή για τρίτη φορά άρα έχει περάσει χρόνος $t_1 = \dfrac{5T}{4}$ όπου η T περίοδος της ταλάντωσης του σώματος Σ1. Άρα $t_1 = \dfrac{5T}{4} = \dfrac{5}{4}2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Rightarrow t_1 = \dfrac{5}{4}\dfrac{\pi}{5}s \Rightarrow t_1 = \dfrac{\pi}{4}s$.

Το σώμα Σ2 εκτελεί ελεύθερη πτώση οπότε $h = \dfrac{1}{2}gt_1^2 = \dfrac{1}{2}10\dfrac{\pi^2}{16}m = \dfrac{1}{2}10\dfrac{10}{16}m \Rightarrow h = \dfrac{25}{8}m = 3{,}125m$

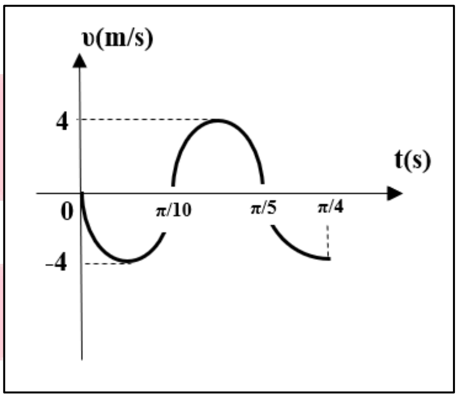
και $\upsilon_2 = gt_1 = 2{,}5\pi\dfrac{m}{s}$.

Γ2. Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι: $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$

όπου $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1}} = 10\dfrac{rad}{s}$. Το σώμα ξεκινά να εκτελεί ταλάντωση από την κάτω ακραία θέση με πλάτος $A = d = 0{,}4m$ και αρχική φάση φ_0 για την οποία έχουμε:

$x = A\cdot\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{t=0} +A = A\cdot\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$

$\eta\mu\varphi_0 = 1 = \eta\mu\dfrac{\pi}{2} \to \varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}rad$.



Ισχύει $\upsilon_{max} = \omega A = \omega\cdot d = 4\dfrac{m}{s}$

Οπότε $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$

$\upsilon = 4\sigma\upsilon\nu\left(10t + \dfrac{\pi}{2}\right)S.I$ με $0 \le t \le t_1 \Rightarrow 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}s$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι αυτή του παραπάνω σχήματος.

Γ3. α) Τα σώματα αποκτώντας μετά την κρούση αντίθετες ταχύτητες από αυτές που είχαν πριν την κρούση (άρα διατηρείται η κινητική τους ενέργεια οπότε η κρούση είναι ελαστική) το σώμα Σ2 θα επιστρέψει στο αρχικό του ύψος και το σώμα Σ1 εκτελέσει ταλάντωση με το ίδιο πλάτος. Η συνάντησή τους θα γίνει πάλι στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ1 μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = 2t_1 = 2\dfrac{5T}{4} = \dfrac{\pi}{2}s = 1{,}57s$

β) Εφαρμόζοντας της ΑΔΟ έχουμε: $\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \ \downarrow +$

$-p_1 + p_2 = p_1' - p_2' \Rightarrow -m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' - m_2\upsilon_2'$ κατά μέτρο $\upsilon_1' = \upsilon_1$, $\upsilon_2' = \upsilon_2$

$\Rightarrow -m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 \Rightarrow m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2 \Rightarrow m_2 = \dfrac{m_1\upsilon_1}{\upsilon_2} \Rightarrow m_2 = \dfrac{1{,}6}{\pi}Kg = \dfrac{1{,}6}{3{,}14}Kg$

Θέμα Δ

Δ1. Από τις συνθήκες ισορροπίας για κάθε σώμα έχουμε:

Δοκός: $\Sigma\tau_{cm}=0\Rightarrow\tau_F-\tau_{T_1}=0\Rightarrow$

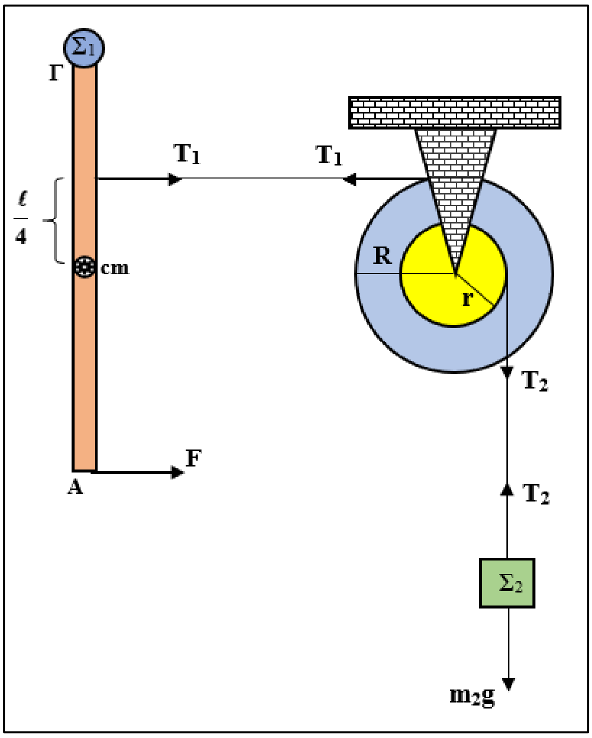
$F\dfrac{\ell}{2}=T_1\dfrac{\ell}{4}\Rightarrow T_1=2F\Rightarrow T_1=16N$

Διπλή τροχαλία: $\Sigma\tau_{\tau\rho o\chi}=0\Rightarrow\tau_{T_1}-\tau_{T_2}=0\Rightarrow$

$T_1R=T_2r\Rightarrow T_2=2T_1\Rightarrow T_2=32N$

Σώμα Σ2: $\Sigma F_{2y}=0\Rightarrow T_2-m_2g=0\Rightarrow$

$m_2g=T_2\Rightarrow m_2=3{,}2Kg$



Δ2. Όταν κοπεί το οριζόντιο νήμα, στη διπλή τροχαλία ασκείται μια νέα τάση $\vec{T}$ και στο σώμα ασκείται το βάρος του $m_2\vec{g}$ και η τάση $\vec{T}$.

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος θα βρεθεί ως εξής:

$$\frac{dL_2}{dt}=\frac{d(m_2\upsilon r)}{dt}=m_2r\frac{d\upsilon}{dt}=m_2r\alpha\Rightarrow\frac{dL_2}{dt}=m_2r\alpha$$

όπου $\vec{\alpha}$ η επιτάχυνση που αποκτά κατά τη διάρκεια της κίνησής του.

Εφαρμόζοντας για το σύστημα διπλή τροχαλία – σώμα Σ2 τους θεμελιώδεις νόμους έχουμε:

για σώμα Σ2 ΘΝΜ: $\Sigma F_{2y}=m_2\alpha\Rightarrow m_2g-T=m_2\alpha\,(1)$

για διπλή τροχαλία ΘΝΣ: $\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow\tau_T=I\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow Tr=I\dfrac{\alpha}{r}\Rightarrow T=\dfrac{I}{r^2}\alpha\;(2)$

ισχύει ότι το σώμα Σ2, τα σημεία του νήματος και τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου ακτίνας r έχουν κάθε στιγμή το ίδιο μέτρο ταχύτητας άρα

$$\upsilon=\upsilon_{\gamma\rho(r)}=r\omega\rightarrow\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon_{\gamma\rho(r)}}{dt}=r\frac{d\omega}{dt}\Rightarrow\alpha=\alpha_{\varepsilon(r)}=r\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

$$(1)+(2)\Rightarrow m_2g-T+T=m_2\alpha+\frac{I}{r^2}\alpha\Rightarrow\left(m_2+\frac{I}{r^2}\right)\alpha=m_2g\Rightarrow\alpha=2\frac{m}{s^2}$$

Οπότε $\dfrac{dL_2}{dt}=m_2r\alpha=3{,}2\cdot0{,}1\cdot2\dfrac{Kg\cdot m^2}{s^2}\Rightarrow\dfrac{dL_2}{dt}=0{,}64\dfrac{Kg\cdot m^2}{s^2}\quad\otimes$

Δ3. Ο ρυθμός παραγωγής έργου στη τροχαλία είναι η ισχύς της τάση του νήματος, δηλαδή:

$$\frac{dW_T}{dt}=\frac{\tau_T\cdot d\theta}{dt}=\tau_T\cdot\omega=Tr\cdot\omega$$

Η τάση του νήματος έχει τιμή $(1)\Rightarrow T=m_2g-m_2\alpha=m_2(g-\alpha)\Rightarrow T=25{,}6N$

Τη στιγμή που ένα σημείο της περιφέρειας του δίσκου ακτίνας R έχει διαγράψει τόξο $s=R\theta=2m$ άρα έχει στραφεί κατά γωνία $\theta=\dfrac{s}{R}=10\,rad$. Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας είναι

$\alpha=r\alpha_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow\alpha_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{\alpha}{r}=20\dfrac{rad}{s^2}$ και η γωνιακή της ταχύτητα είναι:

$$\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}t\Rightarrow t=\frac{\omega}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}\rightarrow\theta=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2=\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}\frac{\omega^2}{\alpha_{\gamma\omega\nu}^2}\Rightarrow\theta=\frac{\omega^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}}\Rightarrow\omega=\sqrt{2\theta\alpha_{\gamma\omega\nu}}=20\frac{rad}{s}$$

Οπότε $\dfrac{dW_T}{dt}=Tr\cdot\omega=51{,}2\dfrac{J}{s}$

Δ4. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ1 τη στιγμή που η δοκός περνά για πρώτη φορά από την οριζόντια θέση θα υπολογιστεί από τη σχέση $\upsilon_{\gamma\rho}=\frac{\ell}{2}\omega$. Η γωνιακή ταχύτητα θα υπολογιστεί εφαρμόζοντας Θεώρημα Έργου Ενέργειας:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_F+W_{m_1g}\Rightarrow\frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega^2=\tau_F\cdot\Delta\theta+m_1g\frac{\ell}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(I_{cm}+I_{m_2}\right)\omega^2=\tau_F\cdot\Delta\theta+m_1g\frac{\ell}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}M\ell^2+m_1\frac{\ell^2}{4}\right)\omega^2=F\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+m_1g\frac{\ell}{2}\Rightarrow\omega=4\frac{rad}{s}$$

άρα $\upsilon_{\gamma\rho}=\frac{\ell}{2}\omega=4\frac{m}{s}$

Δ5. Για να εκτελεί οριακά ανακύκλωση το σύστημα δοκός – σώμα Σ1 θα πρέπει να φτάνει το σώμα Σ1 στην πάνω κατακόρυφη θέση με γωνιακή ταχύτητα $\omega\geq0$ οριακά $\omega_{min}=0$. Εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ, αφού ασκούνται μόνο τα βάρη, θα υπολογίσουμε την ελάχιστη γωνιακή ταχύτητα ω'_{min} που χρειάζεται το σύστημα δοκός – σώμα Σ1 στην οριζόντια θέση για να εκτελεί ανακύκλωση. Έχουμε:

$$E_{\text{ΜΗΧ}\alpha\rho\chi}=E_{\text{ΜΗΧ}\,\tau\varepsilon\lambda}\Rightarrow K_{\alpha\rho\chi}+U_{o\lambda,\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda}\Rightarrow$$

$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{M,\alpha\rho\chi}+U_{m_1,\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{M,\tau\varepsilon\lambda}+U_{m_1,\tau\varepsilon\lambda}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega'^2_{min}+0+0=\frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega^2_{min}+0+m_1g\frac{\ell}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega'^2_{min}+0+0=0+0+m_1g\frac{\ell}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega'^2_{min}=m_1g\frac{\ell}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}M\ell^2+m_1\frac{\ell^2}{4}\right)\omega'^2_{min}\omega'^2=m_1g\frac{\ell}{2}\Rightarrow\omega'_{min}=\sqrt{6}\frac{rad}{s}$$

Όμως μόλις καταργείται η δύναμη $\vec{F}$ έχουμε $\omega=4\frac{rad}{s}>\omega'_{min}=\sqrt{6}\frac{rad}{s}$ άρα εκτελεί ανακύκλωση.