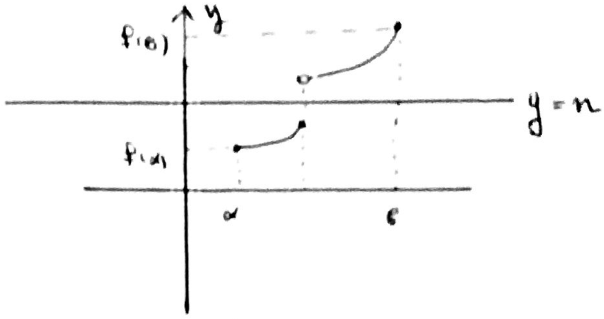
ΛΥΣΗΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1 Απόδειξη σελ. 49 (Σχολικό)

A2 Θεωρία



A3 α) Ψ   β) σελ. 76 (Σχολικό)

A4
1. Σ
2. Λ
3. Σ
4. Σ
5. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1
- $A_{g\circ f} = \{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_g\} = \dots = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2-1}$

B2
- $h'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

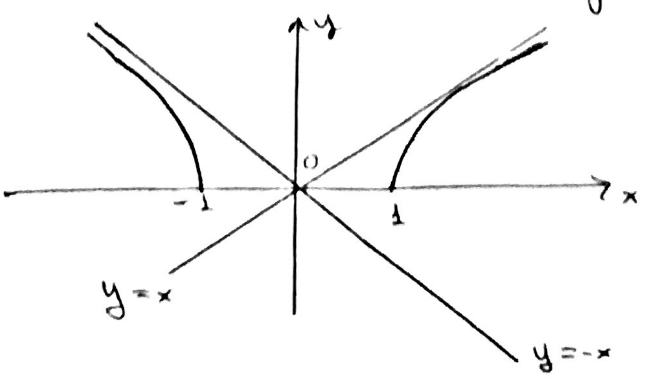
x		-1		1	
h'	$-$				$+$
h	$\searrow$	Τ.Ε.		Τ.Ε.	$\nearrow$

- $h''(x) = \dfrac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} < 0, \ \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

άρα h ∩ στο $(-\infty, -1]$ κ' h ∩ στο $[1, +\infty)$

B3 $y = -x$ ασύμ. στο $-\infty$ κ' $y = x$ ασύμ. στο $+\infty$

B4



ΘΕΜΑ Γ

$\boxed{\Gamma 1}$ Θεωρώ $\Lambda(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$, $x \in [-1,1]$

- $\Lambda'(x) = \dfrac{4x(x^2+1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} - \dfrac{2x}{x^2+1}$

$$= \frac{4x(\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2})}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} - \frac{2x(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$= \frac{2x(2-x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

x		-1		0		1	
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$1-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$\Lambda'(x)$			$-$		$+$		
$\Lambda(x)$			$\searrow$	ο.ε.	$\nearrow$		

άρα $\Lambda(x) \geq \Lambda(0) \Leftrightarrow \Lambda(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{x^2+1} \geq \ln(x^2+1)$

$\boxed{\Gamma 2}$ Για $\boxed{x \neq 0}$ $g'(x) = \dfrac{\frac{2x}{x^2+1} \cdot x - \ln(x^2+1)}{x^2} = \dfrac{\frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^2}$

$$= \frac{2}{x^2+1} - \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = f(x), \quad \forall x \neq 0$$

Για $\boxed{x = 0}$: $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\ln(u+1)}{u} \underset{DLH}{\overset{0/0}{=}} \lim_{u \to 0} \frac{\frac{1}{u+1}}{1} = 1 = f(0)$$

άρα $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\Gamma 3}$ • $E(\Omega) = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx$

Απο το $\underline{\Gamma 1}$ εχουμε $\dfrac{2x^2}{x^2+1} \geq \ln(x^2+1) \quad \forall x \in [-1,1]$

κ' το ισον ισχυει μονο οταν $x=0$ αρα

$$\frac{2x^2}{x^2+1} > \ln(x^2+1) \quad \forall x \in [-1,0)\cup(0,1]$$

$$\overset{:x^2}{\Leftrightarrow} \frac{2}{x^2+1} > \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} \Leftrightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in [-1,0)\cup(0,1]$$

κ' επει δη $f(0) = 1 > 0$ τοτε $f(x) > 0 \ \forall x \in [-1,1]$

οποτε $E(\Omega) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} g'(x)\,dx = [g(x)]_{-1}^{1} =$

$= 2\ln 2$ τ.μ

$\boxed{\Gamma 4}$ $\quad -\ln 4 < \int_{-1}^{1} g(x)\,dx < \ln 4$

• $g'(x) = f(x) > 0 \ \forall x \in [-1,1]$ οποτε $g \uparrow$

αρα $\quad -1 \leq x \leq 1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(-1) \leq g(x) \leq g(1)$

$\Leftrightarrow -\ln 2 \leq g(x) \leq \ln 2 \Rightarrow -\ln 2\,[x]_{-1}^{1} < \int_{-1}^{1} g(x)\,dx < \ln 2\,[x]_{-1}^{1}$

$\Leftrightarrow -2\ln 2 < \int_{-1}^{1} g(x)\,dx < 2\ln 2 \Leftrightarrow -\ln 4 < \int_{-1}^{1} g(x)\,dx < \ln 4$

2^{os} <u>τροπος</u> $\quad g$ περιττη αρα $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \dots = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 α) $\int_3^{g(2)} \frac{x^3}{x^2-4}dx + 4\cdot\int_{g(2)}^{3} \frac{x}{x^2-4}dx = 8$

$\Leftrightarrow \int_3^{g(2)} \frac{x^3}{x^2-4}dx - \int_3^{g} \frac{4x}{x^2-4}dx = 8$

$\Leftrightarrow \int_3^{g(2)} \frac{x^3-4x}{x^2-4}dx = 8$

• Η συναρτηση $\frac{x^3-4x}{x^2-1}$ ειναι συνεχης στο $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$

Επηιδη το $3\in(2,+\infty)$ για να οριζεται το ολοκληρωμα πρεπει κ' το $g(2)\in(2,+\infty)$

• $\int_3^{g(2)} \frac{x(x^2-4)}{x^2-4}dx = 8 \Leftrightarrow \int_3^{g(2)} x\,dx = 8 \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^{g(2)} = 8$

$\Leftrightarrow \frac{g^2(2)}{2} - \frac{9}{2} = 8 \Leftrightarrow g^2(2) - 9 = 16 \Leftrightarrow g^2(2) = 25$

$\Leftrightarrow g(2) = 5$ ή $g(2) = -5$ αρα $\boxed{g(2) = 5}$

$\downarrow$ Απορ. αφου $g(2) > 2$

β) $e^x \geq x+1$ ισχυει $\forall x\in\mathbb{R}$ κ' το ισον ισχυει μονο οταν $x=0$

• $e^{\overset{}{\underbrace{(1+x^2)g'(x)-2xg(x)}_{u}}} \leq \underbrace{(1+x^2)g'(x) - 2xg(x)}_{u} + 1 \Leftrightarrow e^u \leq u+1 \Leftrightarrow \boxed{u=0}$

$:(1+x^2)^2$

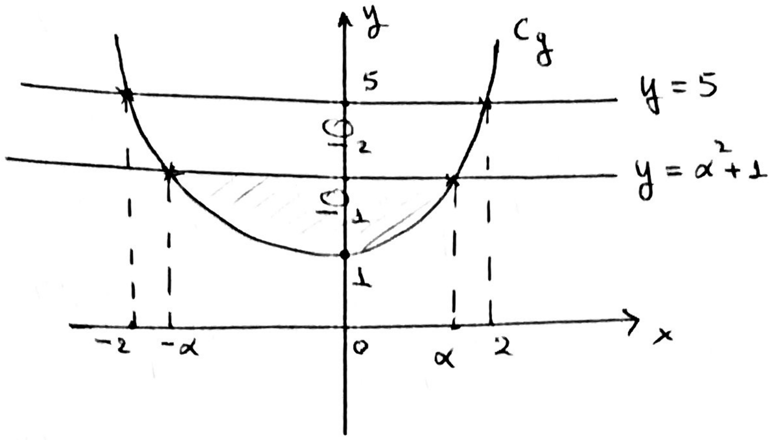
αρα $(1+x^2)g'(x) - 2xg(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{(1+x^2)g'(x) - 2xg(x)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{g(x)}{x^2+1}\right)' = 0$

οποτε $g(x) = c\cdot(x^2+1)$

Για $x=2$: $5 = c\cdot(4+1) \Leftrightarrow c = 1$ οποτε $g(x) = x^2+1$

$\boxed{\Delta 2}$.



• $g(x)=5 \iff x=\pm 2$, • $g(x)=\alpha^2+1 \iff x=\pm\alpha$

• $E(\Omega)=\int_{-2}^{2}(5-g(x))\,dx=\dots=\frac{32}{3}$ τ.μ.

• $E(\Omega_1)=\int_{-\alpha}^{\alpha}(\alpha^2+1-g(x))\,dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}(\alpha^2-x^2)\,dx=\dots=\frac{4\alpha^3}{3}$ τ.μ.

• $2E(\Omega_1)=E(\Omega)\iff \frac{8\alpha^3}{3}=\frac{32}{3}\iff \boxed{\alpha=\sqrt[3]{4}}$

$\boxed{\Delta 3}$

Είναι: $(f''(x))^2>f''(x)\iff (f''(x))^2-f''(x)>0$

$f''(x)$		0		1	
$(f''(x))^2-f''(x)$	+	0	−	0	+

άρα $f''(x)<0$ ή $f''(x)>1$

▸ Επειδή όμως η $f''(x)$ είναι συνεχής κ' μη σταθερή, τότε από γνωστή πρόταση του βιβλίου το σύνολο τιμών της $f''(x)$ θα είναι διάστημα κ' όχι ένωση διαστημάτων. Άρα μόνο μία από τις παραπάνω ανισώσεις θα ισχύουν και επειδή $f''(1)<0$, άρα $f''(x)<0$, οπότε η f ∩ στο $\mathbb{R}$

Δ4. α) $g'(x)=2x$, $g(1)=2$ κ' $g'(1)=2$

οπότε $(\varepsilon_1): y-g(1)=g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=2x$

• $(\varepsilon_2): y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y=2x$

άρα κοινή $(\varepsilon\varphi)$ των C_f κ' C_g είναι $y=2x$

β) • f ∩ άρα $f(x)\leq 2x$ $\forall x\in\mathbb{R}$ κ' το ίσον ισχύει

μόνο όταν $x=0$

• $g''(x)=2>0$ άρα g ∪ οπότε $g(x)\geq 2x$ κ' το ίσον

ισχύει μόνο όταν $x=1$

Γενικά, $f(x)\leq 2x\leq g(x) \Rightarrow f(x)<g(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

οπότε η εξίσωση $f(x)=g(x)$ είναι αδύνατη.

Δ5. f ∩ άρα f' ↓ και $f''(x)<0$

• $f''(t)<0 \Rightarrow \int_0^1 f''(t)\,dt<0$

• $f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)<x^2+1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx<\int_0^1 (x^2+1)\,dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt<\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{4}{3}<0} \Leftrightarrow \frac{4}{3}-\int_0^1 f(t)\,dt>0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^1 \left(f''(t)\cdot e^{g(x)}\right)dt\cdot\int_0^1\left(\frac{4}{3}-f(t)\right)dt=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2+1}\cdot \underbrace{\int_0^1 f''(t)\,dt}_{(-)}\cdot \underbrace{\int_0^1\left(\frac{4}{3}-f(t)\right)dt}_{(+)}=\boxed{-\infty}$