ΔΙΑΓ. Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘ. 3/1/2020

ΘΕΜΑ Α

$\boxed{A1}$ ΘΕΩΡΙΑ

$\boxed{A2}$ ΘΕΩΡΙΑ

$\boxed{A3}$ (γ)

$\boxed{A4}$ α) Ψ β) πχ $f(x)=x^3$, $f\uparrow$
$f'(x)=3x^2\geq 0$

$\boxed{A5}$ α) Σ β) Λ γ) Λ

ΘΕΜΑ Β

$\boxed{B1}$ • $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot \ln x=+\infty(-\infty)=-\infty$ άρα $\boxed{x=0}$ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΑΣ.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$ άρα $\boxed{y=0}$ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜ.

$\boxed{B2}$ $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq \ln e \Leftrightarrow x\leq$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖	$\nearrow$		$\searrow$	
			ΟΜ		

$\boxed{B3}$ • $I_1=\int_1^e \ln x\,dx=[x\ln x]_1^e-[x]_1^e=e-(e-1)=1$

• $I_2=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e(\ln x)'\ln x\,dx=\left[\ln^2x\right]_1^e-\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$

$\Leftrightarrow\ 2I_2=\ln^2e-\ln^2 1 \Leftrightarrow I=\frac{1}{2}$

β' τροπος $I_2=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\left[\frac{\ln^2x}{2}\right]_1^e=1/2$

ΘΕΜΑ Γ

$\boxed{\Gamma_1}$ • Είναι: $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$

• $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^3}{x-\lambda} = \dfrac{-8}{-2-\lambda}$

όταν $-2-\lambda \neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = k \in \mathbb{R}$ άτοπο άρα $\boxed{\lambda=-2}$

$\boxed{\Gamma_2}$ $f(x) = \dfrac{x^3}{x+2}$, $x \neq -2$

α) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \dfrac{3x^3+6x^2-x^3}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$

x	$-\infty$ -3	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$	‖	$+$
$f(x)$	↘ Τ.Ε. ↗	‖	↗

• $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^3}{x+2} = -\infty\,(-8) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^3}{x+2} = +\infty\,(-8) = -\infty$

• $f(-3) = \dfrac{-27}{-3+2} = 27$

• f συνεχής κ' ↘ στο $A_1 = (-\infty, -3]$

→ $f(A_1) = [27, +\infty)$

• f συνεχής κ' ↗ στο $A_2 = [-3, -2)$ → $f(A_2) = [27, +\infty)$

• f συνεχής κ' ↗ στο $A_3 = (-2, +\infty)$ → $f(A_3) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

άρα $f(A) = \mathbb{R}$

β) $x^3 - \alpha x - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow x^3 = \alpha x + 2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 = \alpha(x+2) \overset{**}{\Leftrightarrow} \dfrac{x^3}{x+2} = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$

** όταν $x=-2$: $-8=0$ άτοπο άρα $x+2 \neq 0$

Εφόσον, $\alpha < 27$ τότε $\alpha \notin f(A_1)$, $\alpha \notin f(A_2)$, $\alpha \in f(A_3)$

άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μια τουλ. ρίζα κ' εφόσον η

f είναι γν. μονότονη στο A_3 είναι ακριβώς μία.

$\boxed{\Gamma 3}$ $$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x+2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3+8-8}{x+2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{(x+2)(x^2-2x+4)-8}{(x+2)}\,dx = \int_0^1 \left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8\ln|x+2|\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + 4 - 8\ln 3 + 8\ln 2 = \frac{1}{3} + \frac{9}{3} - 8\left(\ln\frac{3}{2}\right) = \frac{10}{3} - 8\ln\frac{3}{2}$$

$\boxed{\Gamma 4}$ $$\frac{\varepsilon\varphi x}{x+3} = f(x) \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi x}{x+3} = \frac{x^3}{x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\varepsilon\varphi x - (x+3)x^3 = 0$$

Για $\boxed{k=-2}$

διάστημα $[-3,-2]$

Θεωρώ $g(x) = (x+2)\varepsilon\varphi x - (x+3)x^3$

- $g(-2) = 0 - (-2+3)(-2)^3 = -(-8) = 8 > 0$
- $g(-3) = -\varepsilon\varphi(-3) = \varepsilon\varphi 3 < 0$ *

$g(-2)g(-3) < 0$ ... Θ.Β

* $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi \rightarrow$ 2° τεταρτημόριο άρα $\varepsilon\varphi 3 < 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 $\lim\limits_{x\to0^+}(2x\ln x + x^2-4x+3) \overset{*}{=} 0+3=3$

* $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$

Επειδή f συνεχής στο $x_0=0$ τότε $f(0)=3 \iff \alpha=3$

Δ2 • Για $x\in[-1,0)$: $f'(x)=3x^2+3>0$

• Για $x\in(0,+\infty)$: $f'(x)=2\ln x+2+2x-4 = 2\ln x+2x-2$
$= 2(\ln x+x-1)$

$f''(x)=\frac{2}{x}+2>0$ άρα $f'\uparrow$ στο $(0,+\infty)$

• $x>1 \overset{f'\uparrow}{\iff} f'(x)>0$ κ' $0<x<1 \overset{f'\uparrow}{\iff} f'(x)<0$

x	-1		0		1		$+\infty$
$3x^2+3$		+					
$2\ln x+2x-2$				$-$	0	+	
$f'(x)$		+		$-$	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
	Τ.Ε		Τ.Μ		Τ.Ε		

• τοπικό μέγιστο $f(0)=3$

• τοπικό ελάχιστο $f(1)=0$, $f(-1)=-1$

Δ3 (α) • f συνεχής κ' $\uparrow$ στο $A_1=[-1,0] \to f(A_1)=[-1,3]$

• f συνεχής κ' $\searrow$ στο $A_2=[0,1] \to f(A_2)=[0,3]$

• f συνεχής κ' $\uparrow$ στο $A_3=[1,+\infty) \to f(A_3)=[0,+\infty)$

άρα $f(A)=[-1,+\infty)$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\ln x+x^2-4x+3=+\infty\right)$

↓

άρα $f(-1)=-1=f_{min}$ = ολικό ελάχιστο

• $f(f(x)-8)=-1 \Leftrightarrow f(f(x)-8)=f(-1) \Leftrightarrow f(x)-8=-1 \Leftrightarrow f(x)=7$

• $7\notin f(A_1)$, $7\notin f(A_2)$, $7\in[0,+\infty)=f(A_3)$ άρα η εξ. $f(x)=7$ έχει για τουλάχιστον ρίζα κ' επειδή $f\uparrow$ στο A_3 τότε $\exists$ μοναδικό $x_0>1$: $f(x_0)=7$

(β) $I=\int_1^{x_0}(2x\ln x+x^2-4x+3)\,dx$

• $\int_1^{x_0}2x\ln x\,dx=\int_1^{x_0}(x^2)'\ln x\,dx=\left[x^2\ln x\right]_1^{x_0}-\int_1^{x_0}x^2\frac{1}{x}\,dx$

$=x_0^2\ln x_0-\int_1^{x_0}x\,dx=x_0^2\ln x_0-\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{x_0}$

$=x_0^2\ln x_0-\left(\frac{x_0^2}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=x_0^2\ln x_0-\frac{x_0^2}{2}+\frac{1}{2}$

Από (α) ερώτημα έχουμε: $f(x_0)=7 \Leftrightarrow$

$2x_0\ln x_0+x_0^2-4x_0+3=7 \Leftrightarrow 2x_0\ln x_0=4-x_0^2+4x_0$

$\Leftrightarrow x_0\ln x_0=2-\frac{x_0^2}{2}+2x_0 \overset{\cdot x_0}{\Leftrightarrow} \boxed{x_0^2\ln x_0=2x_0-\frac{x_0^3}{2}+2x_0^2}$ (1)

Οπότε $\int_1^{x_0}2x\ln x\,dx=x_0^2\ln x_0-\frac{x_0^2}{2}+\frac{1}{2}\overset{(1)}{=}$

$=2x_0-\frac{x_0^3}{2}+2x_0^2-\frac{x_0^2}{2}+\frac{1}{2}$

$=2x_0-\frac{x_0^3}{2}+\frac{3x_0^2}{2}+\frac{1}{2}$

• $\int_1^{x_0}(x^2-4x+3)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^{x_0}=\frac{x_0^3}{3}-2x_0^2+3x_0-\frac{1}{3}+2-3$

$=\frac{x_0^3}{3}-2x_0^2+3x_0-\frac{4}{3}$

άρα $I=2x_0-\frac{x_0^3}{2}+\cancel{2x_0^2}-\frac{x_0^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{x_0^3}{3}-\cancel{2x_0^2}+3x_0-\frac{4}{3}$

$=\frac{-3x_0^3+2x_0^3}{6}-\frac{x_0^2}{2}+5x_0+\frac{3-8}{6}=\frac{-x_0^3}{6}-\frac{x_0^2}{2}+5x_0-\frac{5}{6}$

$=-\frac{1}{6}\left(x_0^3+3x_0^2-30x_0+5\right)$

$\boxed{\Delta 4}$ $\quad g'(x) + \dfrac{2x-4}{x^2-4x+3} = 0$

▸ θεωρω $K(x) = x^2-4x+3$ με $K'(x) = 2x-4$

$$g'(x) + \frac{K'(x)}{K(x)} = 0 \Leftrightarrow K(x)g'(x) + K'(x) = 0$$

$$\overset{\cdot e^{g(x)}}{\Leftrightarrow} K'(x) + K(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{g(x)} \cdot K'(x) + g'(x) e^{g(x)} \cdot K(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{g(x)} \cdot K(x)\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(e^{g(x)} \cdot (x^2-4x+3)\right)' = 0$$

θεωρω $W(x) = e^{g(x)} \cdot (x^2-4x+3)$

$$\left.\begin{array}{l} W(3) = e^{g(3)} \cdot (9-12+3) = 0 \\ W(1) = e^{g(1)}(1-4+3) = 0 \end{array}\right\} W(3) = W(1)$$

▸ Η W παρ/μη στο $[1,3]$ κ' $W(3) = W(1) = 0$

άρα από θ. Rolle η εξίσωση $W'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{g(x)}(2x-4) + g'(x) e^{g(x)} \cdot (x^2-4x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-4}{x^2-4x+3} + g'(x) = 0 \quad \text{ΕΧΕΙ ΤΟΥΛ. ΜΙΑ ΡΙΖΑ ΣΤΟ } (1,3).$$