

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 3/1/2020

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι η $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

A2. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής.

A3. Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες, τότε το x_0 είναι :

α) 0 β) $\frac{1}{4}$ γ) $\frac{1}{2}$ δ) 1 ε) 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή απάντηση.

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : « Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της τότε θα ισχύει $f'(x) > 0$ »

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήστε την απάντησή σας στο ερώτημα α)

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f(\alpha)f(\beta) < 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

β) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

γ) Αν $f(x) = 3^x$, τότε ισχύει $(3^x)' = x3^{x-1}$.

Μονάδες 8 – 4 – 3 – 4 – 6

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

B1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

B2. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση f .

B3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : $I_1 = \int_1^e xf(x)dx$ και $I_2 = \int_1^e f(x)dx$.

Μονάδες 6 – 11 – 8

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^3}{x-\lambda}$, $x \neq \lambda$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ , ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = -2$.

Με δεδομένο ότι $\lambda = -2$.

Γ2. α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - ax - 2a = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = a$ και στην συνεχεία ότι έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα για κάθε $a < 27$.

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x)dx$.

Γ4. Να βρείτε ένα ακέραιο κ τέτοιο, ώστε στο διάστημα $(\kappa - 1, \kappa)$ η εξίσωση $\frac{e^{\varphi x}}{x+3} = f(x)$ να έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

Μονάδες 4 – 10 – 6 – 5

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



Θέμα Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x + \alpha & , -1 \leq x \leq 0 \\ 2x \ln x + x^2 - 4x + 3 & , x > 0 \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 3$.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ολικό ελάχιστο, αλλά δεν έχει ολικό μέγιστο.

Δ3. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x) - 8) = -1$ έχει ακριβώς μια ρίζα x_0 .

β) Να αποδείξετε ότι $\int_1^{x_0} f(x) dx = -\frac{1}{6}(x_0^3 + 3x_0^2 - 30x_0 + 5)$.

Δ4. Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση g στο $(0, +\infty)$

η εξίσωση $\frac{2x-4}{f(x) - 2x \ln x} + g'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 3)$.

Μονάδες 3 – 9 – 8 – 5