

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1  
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13  
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551  
www.en-dynamei.gr



## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ :

#### Θέμα Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι για το πολυώνυμο  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

**A2.** α) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής

β) Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  τότε η  $f$  παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α αν είναι αληθής , ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής. (μονάδες 1)

β) Να αιτιολογήστε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  και η γραφική παράσταση της  $f$  έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία  $y = x$ , τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ .
2. Αν μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow R$  είναι 1-1 τότε για την αντίστροφή της  $f^{-1}$  ισχύει  $f^{-1}(f(x)) = x, x \in f(A)$
3. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $-f$  είναι συμμετρικές ως προς τον  $x'x$
4. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  τότε

ισχύει η ισοδυναμία  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \right)$ .

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1  
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13  
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551  
www.en-dynamei.gr



5. Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$  τότε κατ' ανάγκην υπάρχουν και τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

Μονάδες : 5 – 6 - 4 – 10

### Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 + 1$  και  $g(x) = \sqrt{x - 2}$ .

- Αν η συνάρτηση  $h$  είναι η σύνθεση της συνάρτησης  $f$  με την συνάρτηση  $g$ , τότε :

**B1.** Να αποδείξετε ότι η  $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ,  $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ .

**B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $h$  ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $h$ .

**B4.** Να την σχεδιάσετε τη  $C_h$ .

Μονάδες : 6 – 8 – 6 – 5

### Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} - \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+1)}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι :  $\frac{2x^2}{x^2+1} \geq \ln(x^2 + 1)$ ,  $x \in [-1,1]$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι παράγουσα της συνάρτησης  $f$ .

**Γ3.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f$ , τον  $x$  και της ευθείες  $x = 1$  και  $x = -1$ .

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι :  $\left| \int_{-1}^1 g(x) dx \right| < \ln 4$ .

Μονάδες : 5 – 7 – 7 - 6

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1  
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13  
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551  
www.en-dynamei.gr



### Θέμα Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύουν :

- $e^{(1+x^2)g'(x)-2xg(x)} + 2xg(x) \leq (1+x^2)g'(x) + 1$  , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $\int_3^{g(2)} \frac{x^3}{x^2-4} dx + 4 \cdot \int_{g(2)}^3 \frac{x}{x^2-4} dx = 8$
- Η  $f$  έχει συνεχή και μη σταθερή δεύτερη παράγωγο στο  $\mathbb{R}$  με :  
$$(f''(x))^2 > f''(x) , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
- $f(0) = 0$  ,  $f'(0) = 2$  και  $f''(1) < 0$

**Δ1.** Να αποδειχθεί  $g(2) = 5$  (μονάδες 3) και να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης  $g$  είναι  $g(x) = x^2 + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . (μονάδες 4)

**Δ2.** Να βρείτε την τιμή του αριθμού  $\alpha > 0$  για την οποία η ευθεία  $y = \alpha^2 + 1$  χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $g$  και την ευθεία  $y = 5$  σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κοίλη για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  .

**Δ4. α)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = 2x$  είναι κοινή εφαπτομένη τω  $C_f$  και  $C_g$  . (μονάδες 2)

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση  $f(x) = g(x)$  είναι αδύνατη . (μονάδες 3)

**Δ5.** Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left( \int_0^1 f''(t) \cdot e^{g(x)} dt \right) \cdot \left( \frac{4}{3} - f(t) \right) dt$$

**Μονάδες : 7 – 4 – 4 – 5 – 5**