ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

13/12/20

ΘΕΜΑ Α

Α1) 1) Σ 2) Λ 3) Λ 4) Λ 5) Σ

Α2) 1) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = 2+8+4\sqrt{3} = 10+4\sqrt{3}$

3) $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3\vec{\alpha}\vec{\beta} - 3\vec{\beta}^2 =$

$= 2\cdot|\vec{\alpha}|^2 + \vec{\alpha}\vec{\beta} - 3|\vec{\beta}|^2 = 2\cdot 2 + 2\sqrt{3} - 3\cdot 8 = 4+2\sqrt{3}-24 = -20+2\sqrt{3}$

4) $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 2+32-8\sqrt{3} = 34-8\sqrt{3}$

άρα $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}| = \sqrt{34-8\sqrt{3}}$

Α3) α) $1-2-1=0 \Leftrightarrow -2=0$ άτοπο άρα $A \notin (\varepsilon)$

β) 1) $\lambda_\zeta = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\zeta = 1$ άρα $(\zeta): y-1 = 1(x-2) \Leftrightarrow y = x-1$

2) $\lambda_\zeta\cdot\lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta\cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = -1$, $(\zeta): y-1 = -1(x-2) \Leftrightarrow$

$y = -x+3$

3) $\perp y'y \Rightarrow y = 1$

4) $\lambda_\zeta = \text{εφ}45 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = 1$ άρα $y = x-1$

5) $\zeta: y = \lambda x \xLeftrightarrow{A\in(\zeta)} 1 = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ άρα $(\zeta): y = \frac{1}{2}x$

ΘΕΜΑ Β

Β1) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\beta} - 2\vec{\beta}^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 - 3\vec{\alpha}\vec{\beta} - 2|\vec{\beta}|^2 =$

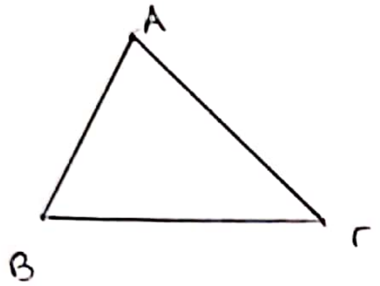
$= 2 + \frac{3}{2} - 2 = 3/2$

$|\vec{u}|^2 = |2\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4-2+1 = 3$ άρα $|\vec{u}| = \sqrt{3}$

$|\vec{v}|^2 = |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2 = \alpha^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = 1+2+4 = 7$ άρα $|\vec{v}| = \sqrt{7}$

$\text{συν}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{7}} = \frac{3}{2\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{2\cdot 21} = \frac{\sqrt{21}}{14}$

B2) 1) $\lambda_{AB} = \frac{10}{10} = 1$, $\lambda_{B\Gamma} = \frac{6-12}{-10-8} = \frac{1}{3}$, $\lambda_{AB} \neq \lambda_{B\Gamma}$ άρα
A, B, Γ όχι συνευθειακά άρα σχηματίζουν τρίγωνο.



2) $(AB): y - y_A = \lambda_{AB}(x - x_A) \Leftrightarrow$
$y - 2 = 1(x+2) \Leftrightarrow y = x + 4$

3) $A\Delta \perp B\Gamma$ άρα $\left.\begin{array}{l}\lambda_{A\Delta}\cdot\lambda_{B\Gamma} = -1\\ \lambda_{B\Gamma} = \frac{1}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_{A\Delta} = -3$

$(A\Delta): y - y_A = -\frac{1}{3}(x - x_\Delta) \Leftrightarrow y - 2 = -3(x+2) \Leftrightarrow$

$y = -3x - 4$

4) M μέσο AΓ άρα $M\left(\frac{x_A + x_\Gamma}{2}, \frac{y_A + y_\Gamma}{2}\right)$ δηλαδή $M(-6, 4)$

$(BM): y - y_B = \frac{y_B - y_M}{x_B - x_M}(x - x_B) \Leftrightarrow y - 12 = \frac{8}{14}(x - 8)$

5) Έστω Z μέσο της AB τότε $Z\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ δηλαδή $Z(3, 7)$

5' $\lambda_{AB} = 1$ άρα λόγω καθετότητας $\lambda_\mu = -1$

$(\mu): y - y_Z = -1(x - x_Z) \Leftrightarrow y - 7 = -(x - 3) \Leftrightarrow y = -x + 10$

B3) $B \in (\varepsilon_1)$ άρα $B(x, -x-1)$

M μέσο του AB άρα $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ δηλαδή $M\left(\frac{4+x}{2}, \frac{3-x-1}{2}\right)$ άρα
$M\left(\frac{4+x}{2}, \frac{2-x}{2}\right)$

$M \in (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \frac{2-x}{2} = -\frac{1}{3}\,\frac{4+x}{2} + \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{2-x}{2} = -\frac{4+x}{6} + \frac{4}{3} \Leftrightarrow$

$3(2-x) = -4 - x + 8 \Leftrightarrow 6 - 3x = 4 - x \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1$

άρα $B(1, -2)$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ Γ και Δ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

Γ1: ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ: 1) Σ

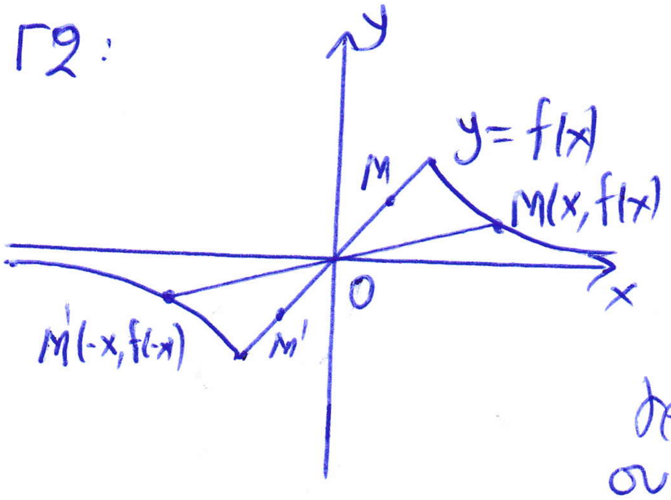
2) Λ

3) Λ

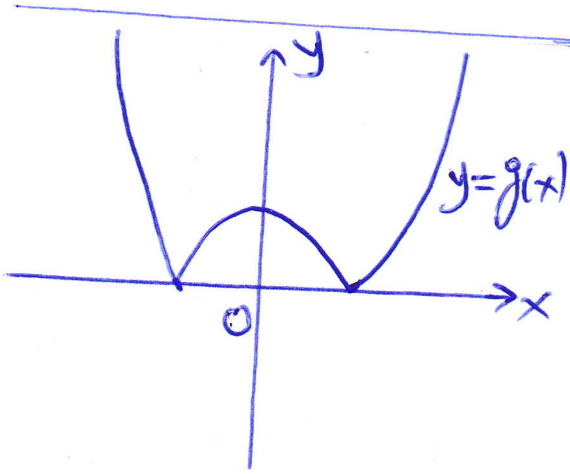
4) Σ

5) Λ

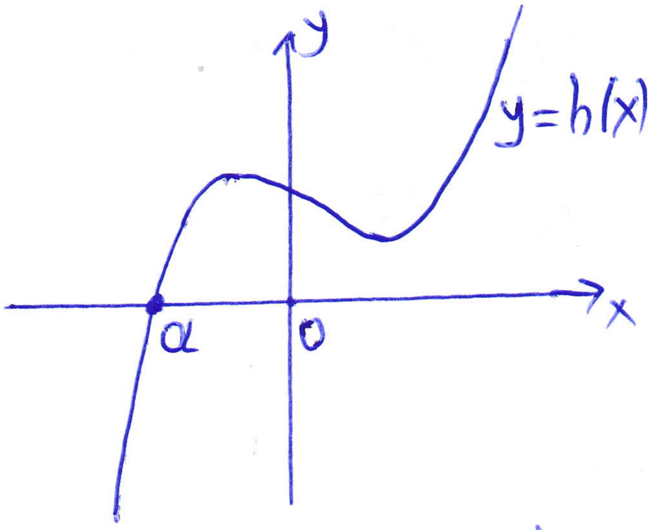
Γ2:



Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το σημείο $M(x, f(x))$ της γραφ. παράστασης της f είναι συμμετρικό ως προς την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων το $M'(-x, f(-x))$, δηλ. $f(-x) = -f(x)$.
Άρα f: περιττή στο $\mathbb{R}$.

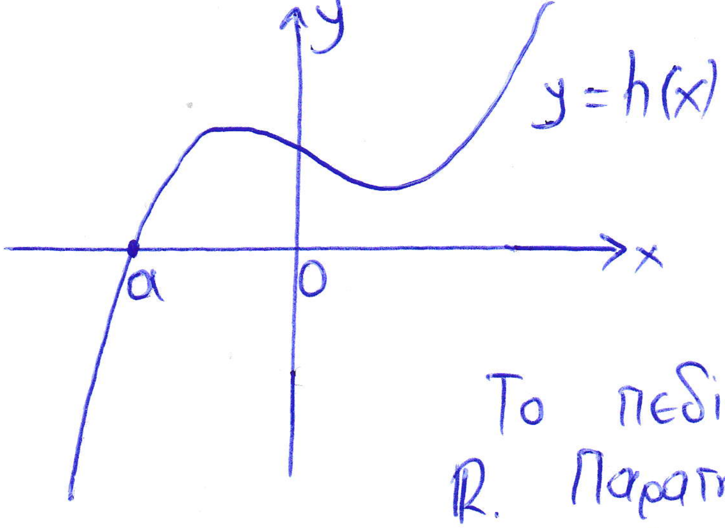


Το πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}$ και υπάρχει συμμετρία της γραφ. παράστασης της g ως προς τον $y'y$
Άρα: g: άρτια στο $\mathbb{R}$.



Το πεδίο ορισμού της h είναι το $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $h(\alpha)=0$, όπου $\alpha<0$. Τότε $-\alpha>0$ και για κάθε $x>0$ ισχύει $h(x)>0$ (άρα $h(-\alpha)>0$)

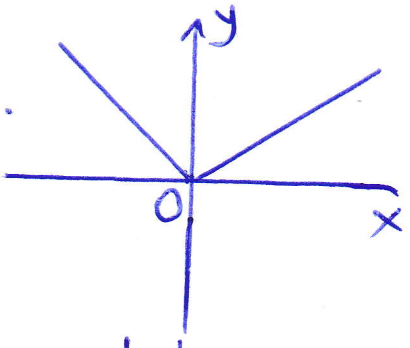
Επομένως, η h δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.



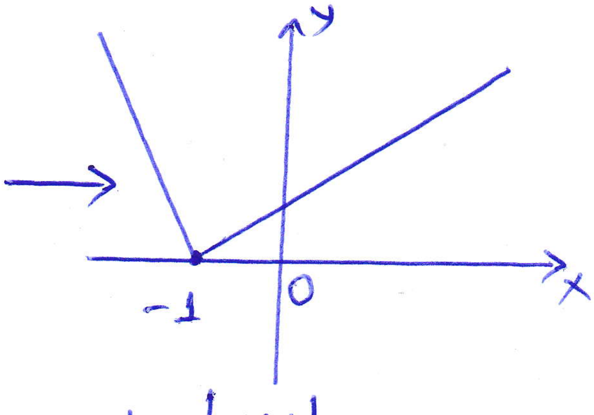
Το πεδίο ορισμού της h είναι το $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $h(\alpha)=0$, όπου $\alpha<0$. Αν η h ήταν άρτια ή περιττή θα έπρεπε να ισχύει $h(-\alpha)=0$ σε κάθε περίπτωση, άτοπο διότι $-\alpha>0$ και $h(x)>0$ για κάθε $x>0$ (βλ. σχήμα).

Γ3: $f(x)=|x+1|+2 \ , \ x\in(-2,3]$

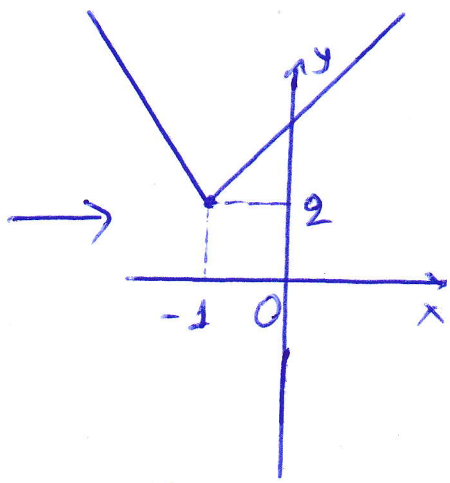
α) **1ος τρόπος**: Η γραφική παράσταση της f είναι μια οριζόντια μετατόπιση 1 μονάδα αριστερά της $y=|x|$ και στη συνέχεια κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδες προς τα πάνω



$y=|x|, \ x\in\mathbb{R}$



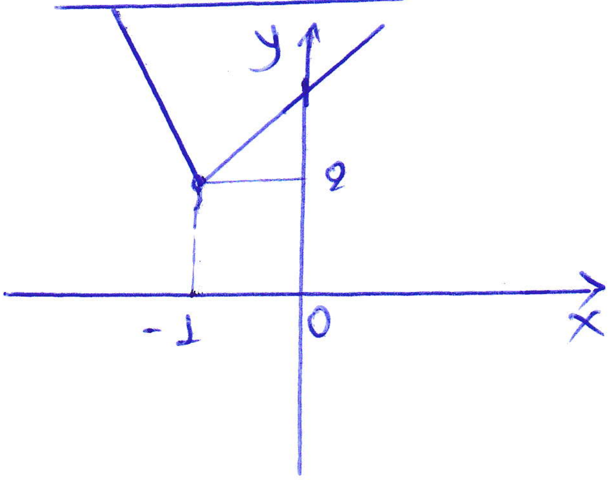
$y=|x+1|$



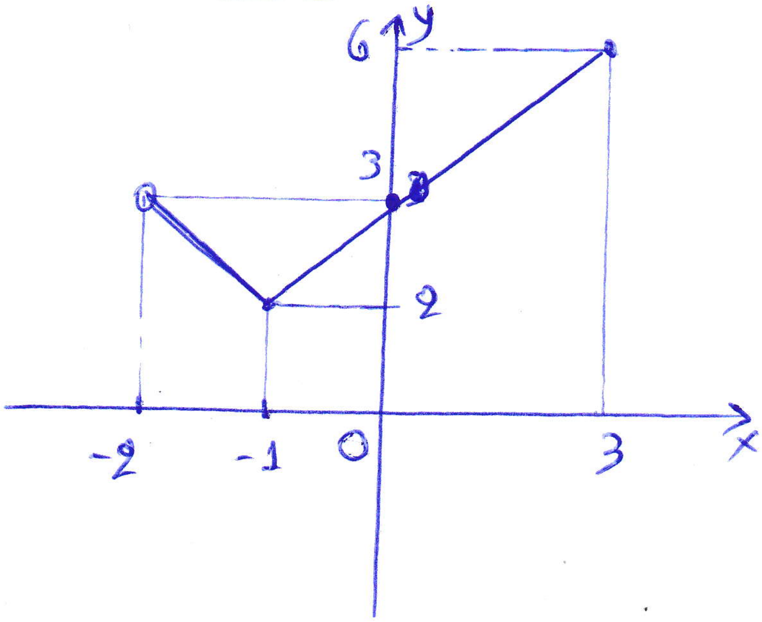
$y=f(x), \ x\in\mathbb{R}$

Ωστόσο μας έχει δοθεί σαν πεδίο ορισμού το $(-2,3]$. Υπολογίζουμε: $f(-2)=3$, $f(3)=6$

Στο $\mathbb{R}$



Στο $(-2,3]$



2ος τρόπος: Για $x\in(-2,-1)$ έχουμε: $x+1<0$, οπότε: $f(x)=|x+1|+2=-x-1+2=-x+1$

Ενώ αν $x\in[-1,3]$ ισχύει $x+1\geq 0$, άρα:

$$f(x)=|x+1|+2=x+1+2=x+3$$

δηλαδή:

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & -2<x<-1\\ x+3, & -1\leq x\leq 3\end{cases}$$

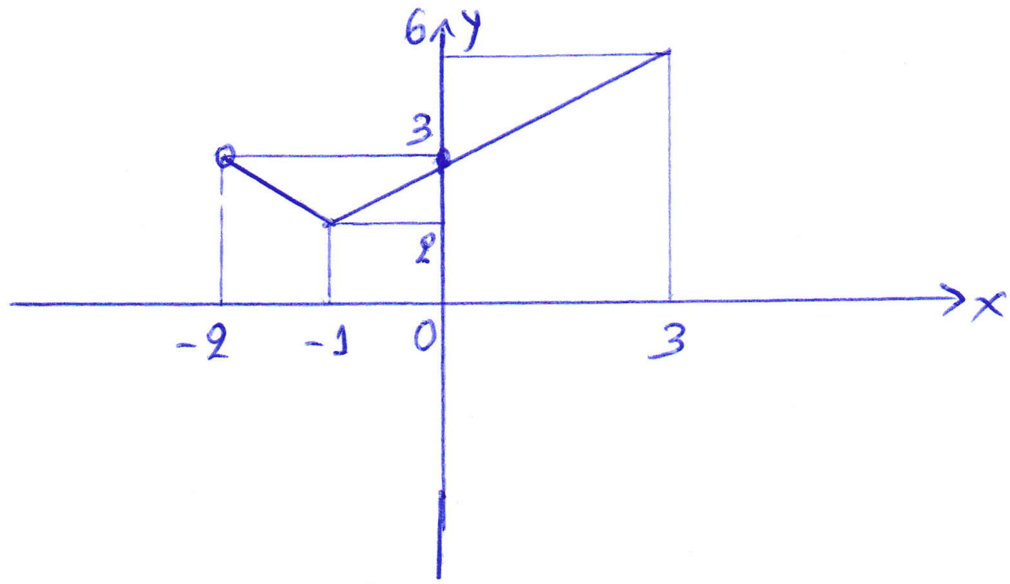
Κάθε κλάδος της f είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα. Για να τους σχεδιάσουμε χρειαζόμαστε 2 σημεία:

$-2 < x < -1$

x	-2	-1
$f(x)=-x+1$	3	2

$-1 \leq x \leq 3$

x	-1	3
$f(x)=+x+3$	2	6



8) Από τη γραφική παράσταση της f έχουμε ότι: 1. $f((-2,3])=[2,6]$ (σύνολο τιμών)

και f: γνησίως φθίνουσα στο $(-2,-1]$

f: γνησίως αύξουσα στο $[-1,3]$

2. Κάθε οριζόντια ευθεία $y=\kappa$, όπου $\kappa \in (2,3)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο ακριβώς σημεία, άρα η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει ακριβώς δύο λύσεις. Προσοχή όταν $\kappa=3$ έχουμε μοναδική λύση $x=0$ ($f(0)=3$)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1: $\eta\mu(5\pi+\varphi) = \eta\mu(4\pi+(\pi+\varphi)) = \eta\mu(\pi+\varphi) = -\eta\mu\varphi$

$\sigma\upsilon\nu(7\pi-\varphi) = \sigma\upsilon\nu(6\pi+(\pi-\varphi)) = \sigma\upsilon\nu(\pi-\varphi) = -\sigma\upsilon\nu\varphi$

$\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}-\varphi\right) = \eta\mu\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sigma\upsilon\nu\varphi$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}+\varphi\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\left(\frac{3\pi}{2}+\varphi\right)\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\varphi\right) = +\eta\mu\varphi$

$\sigma\varphi(5\pi+\varphi) = \sigma\varphi(4\pi+(\pi+\varphi)) = \sigma\varphi(\pi+\varphi) = \sigma\varphi(\varphi)$

$\eta\mu(7\pi-\varphi) = \eta\mu(6\pi+(\pi-\varphi)) = \eta\mu(\pi-\varphi) = \eta\mu\varphi$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\varphi\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \eta\mu\varphi$

$\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}+\varphi\right) = \sigma\varphi\left(4\pi+\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right) = \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right) =$

$= \sigma\varphi\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right) = -\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = -\epsilon\varphi(\varphi)$

Άρα το 1ο μέλος γράφεται:

$$\frac{(-\eta\mu\varphi)(-\sigma\upsilon\nu\varphi)\sigma\upsilon\nu\varphi\,\eta\mu\varphi}{\sigma\varphi(\varphi)\,\eta\mu\varphi\,\eta\mu\varphi\,(-\epsilon\varphi(\varphi))} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}{\sigma\varphi\varphi\cdot(-\epsilon\varphi(\varphi))} =$$

$= -\sigma\upsilon\nu^2\varphi = \eta\mu^2\varphi - 1$, όπως θέλαμε.

Δ2. **Σχόλιο**: Αν $συνx = 0$, τότε από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $ημ^2x + συν^2x = 1$ έχουμε: $ημ^2x = 1 \iff ημx = \pm 1$.

- Η ταυτότητα που θέλαμε να αποδείξαμε εδώ έχει νόημα για τα $x \in \mathbb{R}$ ώστε $συνx \neq 0$ διότι τότε ισχύει ταυτόχρονα: $ημx \neq 1 \iff 1 - ημx \neq 0$

$ημx \neq -1 \iff 1 + ημx \neq 0$

- Έτσι, για $x \in \mathbb{R}$ με $συνx \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{συνx}{1-ημx} + \frac{συνx}{1+ημx} = \frac{συνx(1+ημx)}{(1-ημx)(1+ημx)} + \frac{συνx(1-ημx)}{(1+ημx)(1-ημx)}$$

$$= \frac{συνx(1+ημx) + συνx(1-ημx)}{1^2 - ημ^2x}$$

$$= \frac{συνx + συνx \cdot ημx + συνx - συνx \cdot ημx}{συν^2x}$$

$$= \frac{2συνx}{συν^2x}$$

$$= \frac{2}{συνx}, \text{ όπως θέλαμε.}$$

Δ3. α) Αφού $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, η γωνία ω βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο: άρα: $\begin{cases} \eta\mu\omega = -\frac{\sqrt{5}}{3} < 0 \\ \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \ \varepsilon\varphi\omega > 0 \\ \sigma\varphi\omega > 0 \end{cases}$

· Ισχύει: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

$\Rightarrow \frac{5}{9} + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{5}{9}$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{4}{9}$

$\xRightarrow{\sigma\upsilon\nu\omega < 0} \boxed{\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{2}{3}}$

· $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

άρα $\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

β) Έστω $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: Ισχύει: $\eta\mu(\pi+\theta) = -\eta\mu\theta$,

$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = \eta\mu\left(2\pi + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \eta\mu\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sigma\upsilon\nu\theta$

και $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sigma\varphi\theta$. Θέλουμε να δείξουμε

ότι: $\frac{-\eta\mu\theta}{-\sigma\upsilon\nu\theta} + \sigma\varphi\theta \geq -3\sigma\upsilon\nu\omega \iff \varepsilon\varphi\theta + \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} \geq 2$

$\xLeftrightarrow{\varepsilon\varphi\theta > 0} \varepsilon\varphi^2\theta + 1 \geq 2\varepsilon\varphi\theta \iff \varepsilon\varphi^2\theta - 2\varepsilon\varphi\theta + 1 \geq 0$

$\iff (\varepsilon\varphi\theta - 1)^2 \geq 0$, που ισχύει.