

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 2/1/2021

Θέμα Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

α) Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ τότε $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

A2. Να διατυπώσετε για μια συνεχής συνάρτηση το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής ;

A3. Ποτέ δυο συναρτήσεις f και g είναι ίσες ;

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^{2v+1}} \right) = +\infty$, για κάθε $v \in \mathbb{N}$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B , αντίστοιχα τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ε) Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f(\alpha)f(\beta) < 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες : 8 – 3 – 4 – 10

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2}$, $x \neq 0$.

B1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

B2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

B3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

B4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f'' είναι κάτω από τον x' .

Μονάδες : 7 – 9 – 5 – 4

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2) \ln x + x - 3$, $x > 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και στην συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει ακριβώς 2 ρίζες τις x_1, x_2 .

Γ3. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος **(Γ2)**, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος ώστε : $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$.

Γ4. α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in (0,1)$ με $\alpha < \beta$ τέτοια ώστε :

$$f(\beta) = -f(\alpha) \neq 0. \quad (\text{μονάδες } 2)$$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε :

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{\alpha - \beta}{f(\alpha)}$$

Μονάδες : 8 – 3 – 6 – 8

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln(x + 1)$, $x > -1$.

Δ1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ2. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x + 1)^x = e$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο διάστημα $(-1, +\infty)$. (μονάδες 5)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος **Δ2 (α)** με $x_1 < x_2$ να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{x_2 - x - 1}{f(x) - 1}$. (μονάδες 4)

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $\frac{f(x^2) - f(x^3)}{x} \leq f(x) - f(x^2)$, $x \in (0, 1]$.

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση $f(x^4 + \alpha) + f(x^2) = f(x^2 + \alpha) + f(x^4)$, $\alpha > 0$

Μονάδες : 6 – 9 – 5 – 5