

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1  
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030  
2. ☒ Φανερωμένης 13  
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551  
www.en-dynamei.gr



## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

### Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

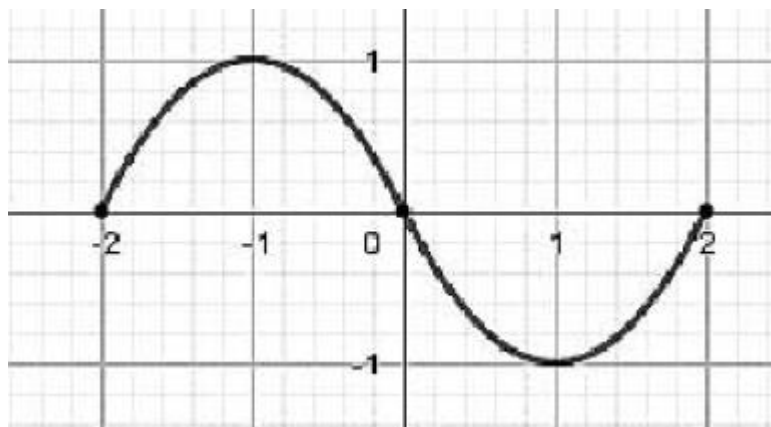
18/04/2021

#### ΖΗΤΗΜΑ Α

Α. Να δώσετε τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ .

Β. Δίνεται συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η  $f'$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , τότε το  $f'(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

Γ. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης  $f$ , ορισμένης στο  $[-2, 2]$ , τρεις φορές παραγωγίσιμης, με  $f'(-2) = 0$ ,  $f'(0) = 4$ ,  $f'(2) = 0$ .



1. Ποιο από τα παρακάτω είναι κρίσιμο σημείο της  $f$ , αιτιολογώντας την απάντησή σας.  
Α. το 0      Β. το -2      Γ. το 2      Δ. το 1
2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης και τα ακρότατα
3. Να βρείτε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
4. Σε ποιο από τα παρακάτω σημεία ισχύει το θεώρημα Fermat για την  $f$  ;  
Α. Το -2      Β. Το 1      Γ. Το 0      Δ. Κανένα από τα προηγούμενα

(Α: 5 Β: 8 Γ: 4x3)

## ZΗΤΗΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x|x|$ .

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης στο 0 (3 μονάδες)
2. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (2 μονάδες)
3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της (5 μονάδες)
4. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ . (5 μονάδες)
5. Σχεδιάσετε την  $f^{-1}$  στο ίδιο σύστημα αξόνων με την  $f$ . (4 μονάδες)
6. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$       ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{f(x) + x}$       iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - 1|}{x^2 - 2x + 1}$ . (6 μονάδες)

## ZΗΤΗΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x > 0$ .

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της
2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$ .
3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (1, e)$  ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $M(\xi, f(\xi))$  να τέμνει τον  $x'$  σημείο με τετμημένη  $-1$ .
4. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + f\left(\frac{x^6}{e^5}\right) = \frac{2}{e}$ .
5. Για κάθε  $x > \sqrt{e^3}$ , να αποδείξετε ότι  $f(x+1) - f(x) < \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} < f(x+2) - f(x+1)$ .

(5 x 5 μονάδες)

## ZΗΤΗΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ .

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της (3 μονάδες)
2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής (4 μονάδες)
3. Να βρείτε πόσες εφαπτομένες της  $C_f$  είναι παράλληλες στην ευθεία  $y = x + 2021$ . (6 μονάδες)
4. Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . (5 μονάδες)
5. Να αποδείξετε ότι  $f(x)(x+1) \leq f(x^2) + 2ex$  για κάθε  $x \geq 1$ . (5 μονάδες)
6. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{f(x) - x - 1}$ . (2 μονάδες)