(2 | 1 | 2021)

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1 α) ΛΑΘΟΣ: $f(x)=x^2$, f συνεχής στο $[-1,2]$ και $f(0)=0$

όμως $f(-1)\cdot f(2)=4>0$

β) ΣΩΣΤΟ: Ισχύει $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

και $\lim\limits_{x\to x_0}(-|f(x)|)=0=\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$

Από κρ. παρεμβολής $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

Α4 α) ΛΑΘΟΣ, β) ΣΩΣΤΟ, γ) ΣΩΣΤΟ, δ) ΣΩΣΤΟ, ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1 $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2}$, $x\neq 0$ συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Κατακόρυφες: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$ Άρα η $\boxed{x=0}$ κατακ. ασύμπτωτη.

Πλάγιες/Οριζόντιες:

Στο $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^3}=2=\lambda$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2}{x^2}$

$=-1=\beta$

Άρα η $\boxed{y=2x-1}$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Στο $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ldots=2=\lambda$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\ldots=-1=\beta$

Η $\boxed{y=2x-1}$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Β2 $f(x)=2x-1-\dfrac{1}{x^2}$, $f'(x)=2+\dfrac{2}{x^3}=2\dfrac{x^3+1}{x^3}$

x		-1		0	
x^3+1	−	0	+	‖	+
x^3	−		−	‖	+
$f'(x)$	+	0	−	‖	+
$f(x)$	↗		↘	‖	↗

- Η f ↗ στο $(-\infty,-1]$ και $(0,+\infty)$
- Η f ↘ στο $[-1,0)$
- $f(-1)=-4$ τοπικό μέγιστο.

B3) $A_1=(-\infty,-1] \xrightarrow[f \nearrow]{f \text{ συνεχής}} f(A_1)=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x), f(-1)] = (-\infty,-4]$

$\blacktriangleright \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x$
$=-\infty$

$A_2=[-1,0) \xrightarrow[f \searrow]{f \text{ συνεχής}} f(A_2)=(\lim\limits_{x\to 0}f(x), f(-1)] = (-\infty,-4]$

$A_3=(0,+\infty) \xrightarrow[f \nearrow]{f \text{ συνεχής}} f(A_3)=(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$

$=(-\infty,+\infty)$

$\blacktriangleright \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x$
$=+\infty$

Συνεπώς $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=\mathbb{R}$.

B4) $f'(x)=2+\dfrac{2}{x^3}=2+2\cdot x^{-3}$, $f''(x)=-6\cdot x^{-4}=\dfrac{-6}{x^4}<0$
οπότε $C_{f''}$ κάτω από $x'x$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) $f(x)=(x-2)\ln x+x-3$, $x>0$ συνεχής ως πράξεις συνεχών.
$f'(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}+1$ με $f'(1)=0$
$f''(x)=1/x+\dfrac{x-x+2}{x^2}=1/x+2/x^2>0 \Rightarrow f' \nearrow$

$\begin{cases} \text{Για } x>1 \overset{f'\nearrow}{\Longleftrightarrow} f'(x)>f'(1)=0 \Rightarrow f \nearrow [1,+\infty) \\ \text{Για } x<1 \overset{f'\nearrow}{\Longleftrightarrow} f'(x)<f'(1)=0 \Rightarrow f \searrow (0,1] \end{cases}$

$\begin{cases} A_1=(0,1] \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f \searrow} f(A_1)=[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+}f(x))=[-2,+\infty) \\ A_2=[1,+\infty) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f \nearrow} f(A_2)=[f(1), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x))=[-2,+\infty) \end{cases}$

$f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=[-2,+\infty)$.

Γ2 Το $0 \in f(A_1)$ και $f(A_2)$ οπότε υπάρχουν
$x_1 \in A_1$ και $x_2 \in A_2$: $f(x_1)=0$ και $f(x_2)=0$
αφού η f είναι γν. μονότονη σε κάθε διάστημα
τα x_1, x_2 μοναδικά. ($x_1, x_2 > 0$ αφού $A=(0,+\infty)$)

Γ3 Είναι $x \cdot f'(x) - f(x) = 0 \overset{x^2 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$

Έστω $K(x) = \frac{f(x)}{x}$
Η $K(x)$ συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών
$K(x_1) = 0 = K(x_2)$ (από Γ2 : $f(x_1) = f(x_2) = 0$)
Η $K(x)$ παρ/μη στο (x_1, x_2) ως πράξεις παρ/μων.
από Θ Rolle $\exists\ \xi \in (x_1, x_2)$: $K'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$
Έστω $M(x) = x f'(x) - f(x) = 2\ln x + x + 1$, $x>0$ τότε $M'(x) = \frac{2}{x} + 1 > 0 \Rightarrow M(x) \uparrow \Rightarrow \xi$ μοναδικό

Γ4 α) Λύση : $A_1 = (0,1]$ και $f(A_1) = [-2, +\infty)$
οπότε η f μπορεί να πάρει αντίθετες τιμές
σύμφωνα με το $f(A)$ (όχι πάντα)
(πχ. $\exists\ a \in A_1$: $f(a) = -1$ αφού $-1 \in f(A_1)$
και $\exists\ b \in A_1$: $f(b) = 1$ " $1 \in f(A_1)$
συνεπώς $f(a) + f(b) = 0$)
Το $(-2, 2) \subseteq f(A_1)$ συνεπώς για κάθε
$a \in A_1$ με $f(a) \in (-2,2)$ θα υπάρχει
$b \in A_1$ όπου $f(b) = -f(a) \in (-2,2)$
και αφού $a < b$: $f(b) = -f(a) \neq 0$ ($f \uparrow$)

β) $f(a) = -f(b)$ τότε $f(a) \cdot f(b) = -f^2(b) < 0$
Η f συνεχής στο $[a, b]$, από Θ Bolzano $\exists\ x_0 \in (a, b)$:
$f(x_0) = 0$ (συμπίπτει με το x_1)
Από ΘΜΤ στο $[a, x_0]$ $\exists\ \xi_1 \in (a, x_0)$: $f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = \frac{-f(a)}{x_0 - a}$
" " " $[x_0, b]$ $\exists\ \xi_2 \in (x_0, b)$: $f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = \frac{-f(a)}{b - x_0}$
Άρα $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{x_0 - a}{-f(a)} + \frac{b - x_0}{-f(a)} = \frac{b-a}{-f(a)} = \frac{a-b}{f(a)}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $f(x) = x\ln(x+1),\ x>-1$ συνεχής στο $(-1,+\infty)$

$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$, $f'(0)=0$

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow f' \uparrow$$

$$\begin{cases} \text{Για } x>0 \overset{f'\uparrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f \uparrow [0,+\infty) \\ \text{Για } x<0 \overset{f'\uparrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f \downarrow (-1,0] \end{cases}$$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$

Δ2) α) $(x+1)^x = e \Leftrightarrow \ln(x+1)^x = \ln e \Leftrightarrow x\cdot\ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow f(x)=1$

$A_1 = (-1,0] \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f\downarrow} f(A_1) = [f(0), \lim_{x\to -1^+} f(x)) = [0,+\infty)$

$A_2 = [0,+\infty) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f\uparrow} f(A_2) = [f(0), \lim_{x\to +\infty} f(x)) = [0,+\infty)$

Συνεπώς το $1 \in f(A_1)$ και $f(A_2)$ άρα $\exists\, x_1 \in A_1$ και $x_2 \in A_2$: $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=1$ τα οποία είναι και μοναδικά καθώς f γν. μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα A_1 και A_2.

β)

x	-1	x_1	0	x_2	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\downarrow$		$\uparrow$	

$f(x_1) = f(x_2) = 1$

$x_1 \in (-1,0)$ όπου $f\downarrow$ άρα για $x \to x_1^+$ ισχύει

$x > x_1 \overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow} f(x) < f(x_1) \Leftrightarrow f(x) < 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x)-1<0}$

$$\lim_{x\to x_1^+} \frac{x_2-x-1}{f(x)-1} = \lim_{x\to x_1^+}\left(\frac{1}{f(x)-1}\cdot(x_2-x-1)\right) = (-\infty)\cdot(x_2-x_1-1)$$

Ισχύει $f(1)=\ln 2$ άρα $f(x_2) = 1 > f(1) \xLeftrightarrow[x>1]{f\uparrow} x_2 > 1$.

Συνεπώς $x_2 - x_1 > 1 \Leftrightarrow x_2 - x_1 - 1 > 0$ ⊛

Άρα το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $-\infty$

$$\left(⊛ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 > 1 \\ x_1 < 0 \Leftrightarrow -x_1 > 0 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} x_2 - x_1 > 1 \right)$$

Δ3) Το ζητούμενο $\frac{f(x^2) - f(x^3)}{x} \leq f(x) - f(x^2)$, $x \in (0,1]$

• Αν $x = 1$ ισχύει η ισότητα

• Αν $x \in (0,1)$ τότε ισχύει $x^3 < x^2 < x$

και αφού $f \uparrow$ στο $(0,1)$: $f(x^3) < f(x^2) < f(x)$

Από ΘΜΤ στο $[x^3, x^2]$ $\exists\, \xi_1 \in (x^3, x^2)$: $f'(\xi_1) = \frac{f(x^2) - f(x^3)}{x^2 - x^3}$

Από ΘΜΤ στο $[x^2, x]$ $\exists\, \xi_2 \in (x^2, x)$: $f'(\xi_2) = \frac{f(x) - f(x^2)}{x - x^2}$

$\xi_1 < \xi_2 \underset{\text{από } Δ1}{\overset{f' \uparrow}{\Leftrightarrow}} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x^2) - f(x^3)}{x^2(1-x)} < \frac{f(x) - f(x^2)}{x(1-x)}$

$\overset{\cdot\, x(1-x) > 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x^2) - f(x^3)}{x} < f(x) - f(x^2)$ άρα ισχύει το ζητούμενο

Δ4) Η εξίσωση: $f(x^4 + a) + f(x^2) = f(x^2 + a) + f(x^4)$, $a > 0$

$\Leftrightarrow f(x^4 + a) - f(x^4) = f(x^2 + a) - f(x^2)$ ⊛'

Αν $M(x) = f(x+a) - f(x)$ με $x \geq 0$ τότε

$M'(x) = f'(x+a) - f'(x)$ όπου $x + a > x \overset{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x+a) > f'(x)$

$\Leftrightarrow M'(x) > 0 \Rightarrow M(x) \uparrow [0, +\infty)$

Η ⊛' $\Rightarrow M(x^4) = M(x^2) \underset{\text{άρα "1-1"}}{\overset{M \uparrow}{\Leftrightarrow}} x^4 = x^2$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$