ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

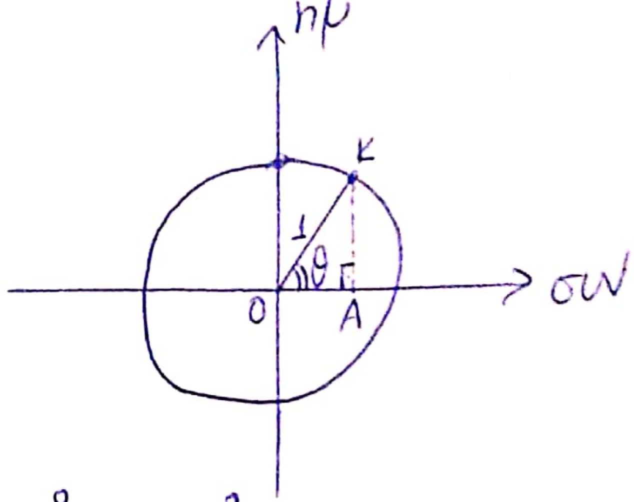
28-11-2021

ΘΕΜΑ Α

Α1: Βιβλίο ΕΔ - σελ. 55

Α2: Βιβλίο ΕΔ - σελ. 56

Α3: Έστω $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.



Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο $O\hat{A}K$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $OA = \sigma\upsilon\nu\theta$, $AK = \eta\mu\theta$, $OK = 1$

i) Από Πυθαγόρειο: $OA^2 + AK^2 = OK^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$$

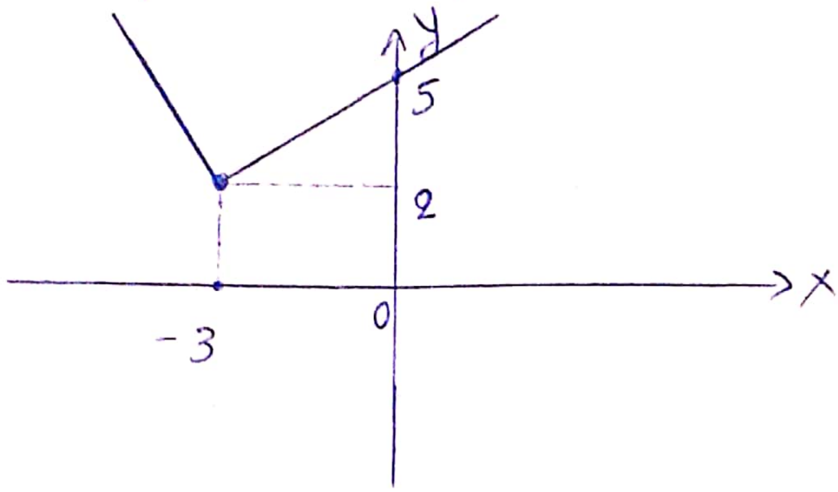
ii) $$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\text{απ. κάθετη}}{\text{προσκ. κάθετη}} = \frac{AK}{OA} = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

iii) $$1 + \varepsilon\varphi^2\theta \overset{ii)}{=\!=} 1 + \frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

Α4.
i) Λ
ii) Λ
iii) Λ
iv) Σ
v) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Παρατηρούμε ότι η f είναι μετατόπιση της $y=|x|$, $x\in\mathbb{R}$, κατά 3 μονάδες αριστερά και 2 μονάδες προς τα πάνω



Β2. Έχουμε $g(x)=h(x-2)+3=(x-2)^2-1+3$, άρα $g(x)=x^2-4x+6$, $x\in\mathbb{R}$.

Β3. i) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Απαιτούμε $1-x^2\geq 0 \iff$
$\iff x^2\leq 1 \iff |x|\leq 1 \iff -1\leq x\leq 1$.

Άρα $A=[-1,1]$. Ισχύει για κάθε $x\in A$, $-x\in A$ και $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=f(x)$. $\boxed{f\text{: άρτια στο } A}$

ii) $A=\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$g(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-g(x)$

$\boxed{g\text{: περιττή στο } \mathbb{R}}$

iii) $h(x)=\sqrt{x-2}$: ισχύει $A=[2,+\infty)$ το οποίο δεν είναι συμμετρικό ως προς το 0.

Άρα $\boxed{h: \text{ούτε άρτια ούτε περιττή}}$

iv) $\varphi(x)=|x-1|-|x+1|$, $A=\mathbb{R}$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\varphi(-x)=|-x-1|-|-x+1|=|-(x+1)|-|-(x-1)|$$
$$=|x+1|-|x-1|$$
$$=-\varphi(x)$$

άρα $\boxed{\varphi: \text{περιττή στο } \mathbb{R}}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=2x^3-ax-a+3$, $x\in\mathbb{R}$

i) $A(-2,-10)\in C_f \iff f(-2)=-10 \iff$

$\iff -16+2a-a+3=-10 \iff \boxed{a=3}$

Γ1 ii) Για $a=3$: $f(x)=2x^3-3x$, $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x)=2(-x)^3-3\cdot(-x)=-2x^3+3x=-f(x)$$

οπότε $\boxed{f: \text{περιττή στο } \mathbb{R}}$

Γ2i) Αν για κάποια γωνία x ίσχυε $ημx = 0$ και $συνx = 0$ τότε από βασική ταυτότητα: $ημ^2x + συν^2x = 1 \Rightarrow 0 = 1$, άτοπο.

Γ2ii) Αν $συνx = 0$ τότε και $ημx = 0$, άτοπο από Γ2i), άρα: $εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{ημx}{ημx} = 1$.

Γ3) $ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + συν^2ω = 1$

$\Rightarrow \frac{5}{9} + συν^2ω = \frac{9}{9} \Rightarrow συν^2ω = \frac{4}{9}$

$\xrightarrow[συνω<0]{π<ω<\frac{3π}{2}} συνω = -\frac{2}{3}$

Άρα $εφω = \frac{ημω}{συνω} = \frac{-\sqrt{5}/3}{-2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

και συνεπώς: $σφω = \frac{1}{εφω} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η $2\sigma\upsilon\nu^2 x - 5\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$ έχει διακρίνουσα

$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$, άρα:

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} \overset{(+)}{} \; 2 \leftarrow \text{απορρίπτεται} \\ \overset{(-)}{} \; \frac{1}{2}, \text{ άρα } \boxed{\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \xRightarrow[\eta\mu x < 0]{\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi} \boxed{\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$A = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x = -\sqrt{3} + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}.$$

Δ2 i) Για το i) πρέπει $x \neq \frac{\pi}{4}$, έχουμε:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \varepsilon\varphi x} + \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\varphi x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} + \frac{\eta\mu x}{1 - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} + \frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} =$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \quad \checkmark$$

ii) $$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x(1 + \eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu x(1 - \eta\mu x)}{(1 - \eta\mu x)(1 + \eta\mu x)}$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}.$$

iii) $\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)\left(1+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = \left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right) =$

$$= \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} = \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \eta\mu x \cdot \varepsilon\varphi x$$

Δ3. Για $\omega \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$-1 \le \frac{\sqrt{3}\,\eta\mu\omega}{2+\sigma\upsilon\nu\omega} \le 1 \iff \left|\frac{\sqrt{3}\,\eta\mu\omega}{2+\sigma\upsilon\nu\omega}\right| \le 1 \overset{2+\sigma\upsilon\nu\omega>0}{\iff}$$

$$\sqrt{3}\,|\eta\mu\omega| \le 2+\sigma\upsilon\nu\omega \iff 3\eta\mu^2\omega \le 4+4\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega$$

$$\iff 3(1-\sigma\upsilon\nu^2\omega) \le 4+4\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega \iff$$

$$3-3\sigma\upsilon\nu^2\omega \le 4+4\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega \iff$$

$$0 \le 4\sigma\upsilon\nu^2\omega+4\sigma\upsilon\nu\omega+1 \iff 0 \le (2\sigma\upsilon\nu\omega+1)^2,$$

που ισχύει.