# Λύσεις διαγωνίσματος Γ' λυκείου 27/11/2021

**Θέμα Α** $A_1$ - γ  $A_2$ - δ  $A_3$ - α  $A_4$ - α  $A_5$ Λ Λ Λ Σ Σ

## Θέμα Β

**Β1 - γ**  $t_1 = N_1 T = 20T$  $A_1 = A_0/4 \Rightarrow A_0 e^{-\Lambda t_1} = A_0/4 \Rightarrow e^{-\Lambda t_1} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \ln e^{-\Lambda t_1} = \ln\frac{1}{4} \Rightarrow -\Lambda t_1 \ln e = \ln 1 - \ln 4 \Rightarrow \Lambda t_1 = \ln 4 \Rightarrow \Lambda = \frac{\ln 4}{t_1}$

Συνολικά τη χρονική στιγμή $t_2$ έχουν εκτελεστεί $N_2 = 20 + 40 = 60$ ταλ.

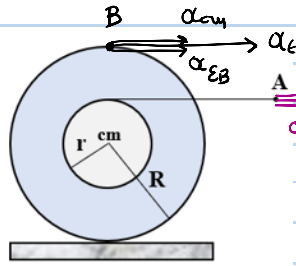
Άρα $t_2 = N_2 T = 60T$

$A_2 = A_0 e^{-\Lambda t_2}$  όπου $\Lambda t_2 = \frac{\ln 4}{t_1} t_2 = \frac{\ln 4}{20T} \cdot 60T = 3\ln 4 = \ln 4^3 = \ln 64$

$A_2 = \frac{A_0}{e^{\Lambda t_2}} = \frac{A_0}{e^{\ln 64}} = \frac{A_0}{64} \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{A_0}{64}}$

**Β2  Ι - γ | ΙΙ - α**

Ι)




Ισχύει $\vec{\alpha}_{\varepsilon\varphi B} = \vec{\alpha}_{cm} + \vec{\alpha}_{\varepsilon B} \Rightarrow \alpha_{\varepsilon\varphi B} = \alpha_{cm} + \alpha_{\varepsilon B}$

όμως εκτελεί κχο άρα $\alpha_{cm} = R\alpha_{\gamma\omega\nu} = \alpha_{\varepsilon B}$

Άρα $\alpha_{\varepsilon\varphi B} = \alpha_B = 2\alpha_{cm} = 2\frac{5}{8}\alpha_A \Rightarrow \boxed{\alpha_{\varepsilon\varphi B} = \alpha_B = 1{,}25\,\alpha_A}$

ΙΙ) Ισχύει $\vec{\alpha}_A = \vec{\alpha}_{cm} + \vec{\alpha}_{\varepsilon A} \Rightarrow \alpha_A = \alpha_{cm} + \alpha_{\varepsilon A}$

όμως $\alpha_{cm} = \frac{5}{8}\alpha_A \Rightarrow \alpha_A = \frac{8}{5}\alpha_{cm}$  άρα $\frac{8}{5}\alpha_{cm} = \alpha_{cm} + \alpha_{\varepsilon A} \Rightarrow \frac{3}{5}\alpha_{cm} = \alpha_{\varepsilon A}$

$\Rightarrow \frac{3}{5} R\alpha_{\gamma\omega\nu} = r \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow r = \frac{3}{5}R = 0{,}6\,R$

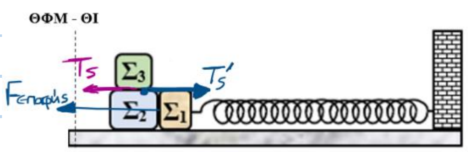
Δίνεται $\alpha_K = 4\alpha_{cm} \Rightarrow \frac{\upsilon_{\gamma\rho R}^2}{R} = 4\alpha_{cm}$  $\upsilon_{\gamma\rho R} = R\omega = \upsilon_{cm}$ (εκτελεί κχο)

$\Rightarrow \frac{\upsilon_{cm}^2}{R} = 4\alpha_{cm} \Rightarrow \upsilon_{cm}^2 = 4R\alpha_{cm}$ (1)

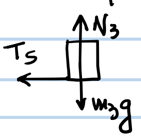
Ισχύουν $\left.\begin{matrix} \upsilon_{cm} = \alpha_{cm} t \\ x_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{cm} = \frac{\upsilon_{cm}^2}{2\alpha_{cm}} \overset{(1)}{\Rightarrow} x_{cm} = \frac{4R\alpha_{cm}}{2\alpha_{cm}} \Rightarrow x_{cm} = 2R$

Για το ξετύλιγμα του νήματος ισχύει $\ell_{\nu\eta\mu} = r\theta = 0{,}6R\theta = 0{,}6\,x_{cm} \Rightarrow \boxed{\ell_{\nu\eta\mu} = 1{,}2R}$

**Β3 - γ**  Η στατική τριβή $T_s$ είναι η δύναμη επαναφοράς για το σώμα $\Sigma_3$




Κατά μέτρο: $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu(3)} = T_s = m_3|\alpha| = m_3\omega^2|x|$




Ισχύει $\Sigma F_{3y} = 0 \Rightarrow N_3 = m_3 g$ και $T_{s\max} = \mu_s N_3 = \mu_s m_3 g$

Πρέπει $T_s \le T_{s\max} \Rightarrow m_3\omega^2|x| \le \mu_s m_3 g \Rightarrow \omega^2|x| \le \mu_s g \Rightarrow |x| \le \frac{\mu_s g}{\omega^2}$

$|x_{max}| = \Delta\ell = A_{max} = \frac{\mu_s g}{\omega^2} \Rightarrow \Delta\ell = A_{max} = \frac{\mu_s g}{k/4m}$ όπου $D=k=m_{ολ}\omega^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{k/4m}$

$\Rightarrow \Delta\ell = A_{max} = \frac{4\mu_s mg}{k}$ μέγιστο επιτρεπτό πλάτος για να μην ολισθαίνει το σώμα $Σ_3$

Για $Σ_2+Σ_3$ : $ΣF_{2,3} = F_{επαφής} = (m_2+m_3)|α| \Rightarrow F_{επαφής} = 3m\omega^2\cdot|x| \rightarrow$ στη ΘΦΜ-ΘΙ $|x|=0$

Στη ΘΦΜ - ΘΙ $|x|=0 \longrightarrow F_{επαφής}=0$ άρα χάνεται η επαφή των $Σ_{2,3}$ από το $Σ_1$

Για το σώμα $Σ_2$ ισχύει $ΣF_{2x} = m_2|α| \Rightarrow F_{επαφής} - T_s' = m_2|α|$ $\quad T_s'=T_s$ δράση - αντίδραση

$\Rightarrow F_{επαφής} - m_3\omega^2|α| = m_2\omega^2|α| \Rightarrow F_{επαφής} = 2m\omega^2|x| + m\omega^2|x| \Rightarrow F_{επαφής} = 3m\omega^2\cdot|x|$

Στη ΘΦΜ - ΘΙ : $|x|=0$ οπότε $F_{επαφής}=0$ άρα χάνεται η επαφή.

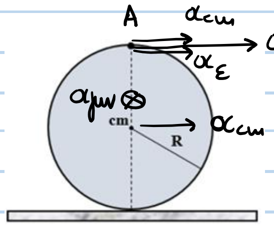
Στη ΘΦΜ - ΘΙ για το σύστημα $υ=υ_{max} \rightsquigarrow υ_{max} = \omega A_{max}$

Τότε ξεκινά νέα ααт το σύστημα ελατήριο - σώμα $Σ_1$ με $υ_{1max} = υ_{max}$

$\Rightarrow \omega_1 A_1 = \omega A_{max} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot A_1 = \sqrt{\frac{k}{4m}}\,\frac{4\mu_s mg}{k} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}A_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\,\frac{4\mu_s mg}{k}$

όπου $D_1=k=m_1\omega_1^2 \Rightarrow \omega_1=\sqrt{\frac{k}{m_1}}=\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\qquad \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{2\mu_s mg}{k}}$

Θέμα Γ




Γ1 Εκτελεί κχο $α_{cm} = Rα_{γων} = \frac{1}{π}\cdot 3π\, m/s^2 \Rightarrow \boxed{α_{cm} = 3\, m/s^2}$

Τη χρονική στιγμή $t=0$ $υ_{cm}=0$, $\omega=0$ $α_κ=0$

Για την επιτάχυνση της κουκίδας ισχύει :

$\vec{α}_A = \vec{α}_{cm}+\vec{α}_ε \Rightarrow α_A = α_{cm}+α_ε = 2α_{cm} \Rightarrow \boxed{α_A = 6\, m/s^2}$

όπου $α_{cm} = Rα_{γων} = α_ε$

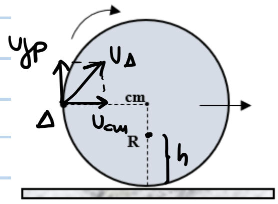
Γ2 Ισχύει $υ_{cm} = α_{cm}t \Rightarrow t = υ_{cm}/α_{cm} = \frac{12}{3}$ sec $\Rightarrow t=4$ sec

$Θ = \frac{1}{2}α_{γων}t^2 = \frac{1}{2}3π\cdot16$ rad $= 24π$ rad $\rightarrow N = \frac{Θ}{2π} = \frac{24π}{2π} \Rightarrow \boxed{N=12 \text{ στροφές}}$

Γ3 $t=1$sec $\rightarrow υ_{cm} = α_{cm}t = 3\, m/s$.

α) Η γωνία που έχει διαγράψει η κουκίδα είναι : $Θ = \frac{1}{2}α_{γων}t^2 = \frac{1}{2}3π\cdot1 \Rightarrow Θ = \frac{3π}{2}$ rad

Άρα βρίσκεται στη θέση Δ του σχήματος.

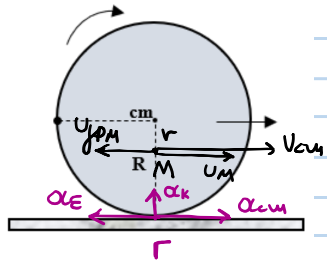



Ισχύει $\vec{υ}_Δ = \vec{υ}_{cm}+\vec{υ}_{γρ} \longrightarrow υ_Δ = \sqrt{υ_{cm}^2+υ_{γρ}^2}$ , $υ_{cm}=υ_{γρ}=R\omega$

$\Rightarrow υ_Δ = \sqrt{2υ_{cm}^2} = υ_{cm}\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{υ_Δ = 3\sqrt{2}\, m/s}$

β) Για το σημείο Μ της κατακόρυφης διαμέτρου ισχύει : $h = R - r \Rightarrow r = R - h$

$\Rightarrow r = 1/π - 3/4π \Rightarrow r = \frac{1}{4π}\, m = R/4$ η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του




Ισχύει $\vec{v}_M = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{γρM} \Rightarrow v_M = v_{cm} - v_{γρM}$

όπου $v_{γρM} = rω = \frac{Rω}{4} = \frac{v_{cm}}{4}$

$$v_M = v_{cm} - \frac{v_{cm}}{4} = \frac{3}{4}v_{cm} = \frac{3}{4}\cdot 3 \Rightarrow \boxed{v_M = 2{,}25\, m/s}$$

γ) Για το σημείο Γ που είναι σε επαφή με το δάπεδο ισχύει:

$\vec{a}_Γ = \underbrace{\vec{a}_{cm} + \vec{a}_ε}_{\vec{0}} + \vec{a}_κ$ όμως $a_{cm} = a_ε = Rα_{γων}$ και $\vec{a}_{cm} = -\vec{a}_ε$

$$\Rightarrow \vec{a}_Γ = \vec{a}_κ \Rightarrow a_Γ = a_κ = \frac{v_{γρ}^2}{R} = \frac{v_{cm}^2}{R} = \frac{9}{1/π} \Rightarrow \boxed{a_Γ = 9π\, m/s^2}$$

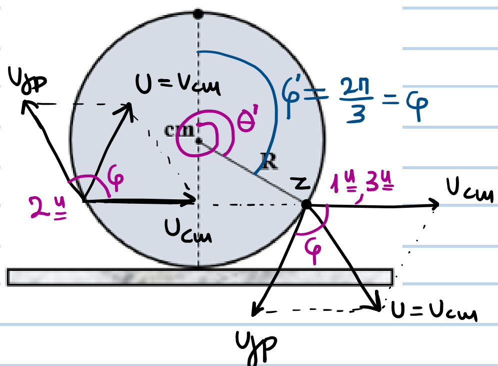
Γ4) Για το μέτρο της ταχύτητας της κουκίδας ισχύει:

$v = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{γρ}^2 + 2v_{cm}v_{γρ}\,συνφ}$ , $v_{cm} = v_{γρ} = Rω$

$$v = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{cm}^2 + 2v_{cm}^2\,συνφ} = \sqrt{2v_{cm}^2 + 2v_{cm}^2\,συνφ} \Rightarrow v^2 = 2v_{cm}^2 + 2v_{cm}^2\,συνφ$$

όταν $v = v_{cm} \to v_{cm}^2 = 2v_{cm}^2 + 2v_{cm}^2\,συνφ \Rightarrow συνφ = -1/2 \to φ = 120° = \frac{2π}{3}$ rad

όπου $φ = 2π/3$ rad η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{v}_{cm}, \vec{v}_{γρ}$




3η φορά $v = v_{cm}$ στη θέση Ζ.

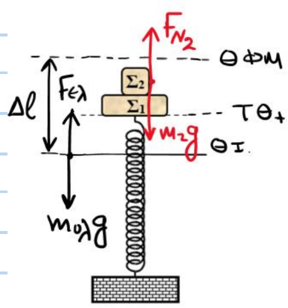
Μέχρι τότε η κουκίδα έχει διαγράψει γωνία

$θ' = 2π + φ' = 2π + \frac{2π}{3} \Rightarrow θ' = \frac{8π}{3}$ rad

$φ = φ' = \frac{2π}{3}$ rad (αφού είναι γωνίες που έχουν κάθετες πλευρές)

Άρα $θ' = \frac{1}{2}α_{γων}t'^2 \Rightarrow \frac{8π}{3} = \frac{1}{2}3π t'^2 \Rightarrow t'^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow \boxed{t' = \frac{4}{3}\ sec}$

## Θέμα Δ




Δ1) Στη ΘΙ: $ΣF = 0 \Rightarrow F_{ελ} = m_{ολ}g \Rightarrow kΔl = m_{ολ}g$

$$\Rightarrow Δl = \frac{m_{ολ}g}{k} = \frac{(m_1+m_2)g}{k} \Rightarrow Δl = 0{,}4\,m$$

Αρχική εκτροπή ΘΙ $A = d = 0{,}2m < Δl = 0{,}4m$

Σε τυχαία θέση στα θετικά του άξονα της αατ (ΤΘ+)

για το σώμα $Σ_2$: $ΣF_2 = m_2 α \Rightarrow F_{N_2} - m_2 g = -m_2ω^2 y$

$\boxed{F_{N_2} = m_2 g - m_2 ω^2 y}$ (*) όπου $F_{N_2}$ = δύναμη επαφής που δέχεται από το $Σ_1$

Για να μη χάνει επαφή πρέπει $F_{N_2} \geq 0 \Rightarrow m_2 g - m_2ω^2 y \geq 0$

$\Rightarrow \omega^2 y \le g \Rightarrow \frac{k}{m_1+m_2} y \le g \Rightarrow y \le \frac{(m_1+m_2)g}{k}$ άρα $y_{max} = A_{max} = \frac{(m_1+m_2)g}{k}$

όπου $D = k = m_{ολ}\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m_1+m_2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$

Μέγιστο επιτρεπτό πλάτος για να μη χάνει την επαφή το $Σ_2$ από το $Σ_1$

είναι το $A_{max} = \Delta\ell = \frac{(m_1+m_2)g}{k} = \Delta\ell = 0,4m$

Το πλάτος της ααΤ του συστήματος είναι $A = 0,2m < \Delta\ell = 0,4m$

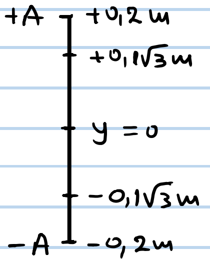
άρα δε χάνει επαφή.

**Δ2** $\frac{|d\vec{P}_1|}{dt} = 2,5\sqrt{3}\ \frac{kg\,m/s}{s}$

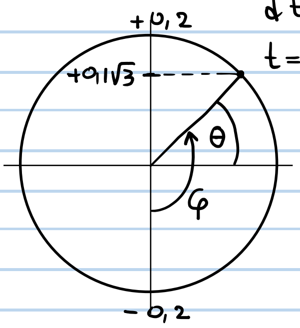
Ισχύει $\frac{|d\vec{P}_1|}{dt} = \Sigma F_1 = m_1|\alpha| = m_1|-\omega^2 y| \Rightarrow \frac{|d\vec{P}_1|}{dt} = m_1\omega^2|y| \Rightarrow 2,5\sqrt{3} = 1\cdot 25\,|y|$

όπου $D = k = m_{ολ}\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m_{ολ}} = \frac{100}{4} \Rightarrow \omega^2 = 25 \Rightarrow \omega = 5\ rad/s$

$\Rightarrow |y| = 0,1\sqrt{3}\ m \rightarrow y = \pm 0,1\sqrt{3}\ m$




2η φορά $\frac{|d\vec{P}_1|}{dt} = 2,5\sqrt{3}\ \frac{kg\,m/s}{s}$ στη θέση $y = +0,1\sqrt{3}\,m,\ υ>0$




$ημθ = \frac{0,1\sqrt{3}}{0,2} = \sqrt{3}/2 \rightarrow θ = π/3\ rad$

$φ = π/2 + π/3 \Rightarrow φ = 5π/6\ rad$

Ισχύει $φ = \omega t \Rightarrow \frac{5π}{6} = 5t$

$\Rightarrow \boxed{t = π/6\ sec}$

**Δ3** (*) $\Rightarrow F_{N_2} = m_2 g - m_2\omega^2 y \qquad -A \le y \le +A \longrightarrow -0,2m \le y \le +0,2m$

$\Rightarrow F_{N_2} = 30 - 3\cdot 25\cdot y \Rightarrow \underline{F_{N_2} = 30 - 75\cdot y \ \ SI}$

για $y = -0,2m \longrightarrow F_{N_2} = 30 - 75(-0,2) \Rightarrow \boxed{F_{N_2} = 45N = F_{N_2 max}}$

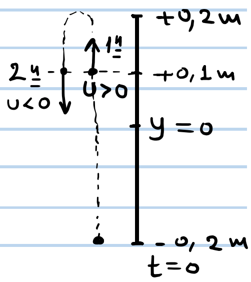
για $y = +0,2m \longrightarrow F_{N_2} = 30 - 75(+0,2) \Rightarrow \boxed{F_{N_2} = 15N = F_{N_2 min}}$

**Δ4** $\frac{dK_2}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F_2}}{dt} = \frac{\Sigma F_2\, dy}{dt} = \Sigma F_2 \cdot υ = m_2 α \cdot υ = -m_2\omega^2 y \cdot υ$

Δίνεται $F_{N_2} = 22,5N \rightarrow F_{N_2} = 30 - 75y \Rightarrow 22,5 = 30 - 75y$

$\Rightarrow -7,5 = -75y \Rightarrow y = +0,1m$

2η φορά $F_{N_2} = 22,5N$ στη θέση $y = +0,1m$ με $υ<0$

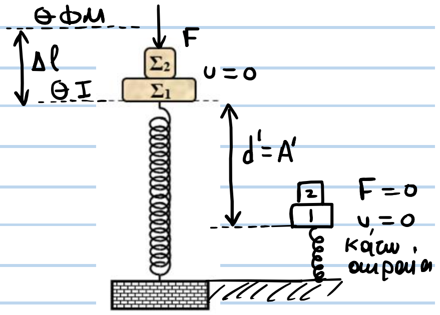



ΑΔΕΤ: $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_{ολ}υ^2 + \frac{1}{2}ky^2 \xrightarrow{υ<0} υ = -\omega\sqrt{A^2 - y^2}$
$D = k$

$\Rightarrow v = -5\sqrt{\frac{4}{100}-\frac{1}{100}} \Rightarrow v = -5\frac{\sqrt{3}}{10} \Rightarrow v = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ m/s.$

Άρα $\frac{dK_2}{dt} = -m_2\omega^2 y\cdot v = -3\cdot 25\cdot(+0{,}1)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{dK_2}{dt} = +3{,}75\sqrt{3}\ J/s}$

Δ5| $F = 40N$




α) ΘΜΚΕ για σύστημα από ΘΙ στην κάτω ακραία

$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{w_{ολ}} + W_{F_{ελ}} + W_F$

$0-0 = m_{ολ} g d' + U_{ελ,αρχ} - U_{ελ,τελ} + F\cdot d'$

$0 = m_{ολ} g d' + \frac{1}{2} k Δℓ^2 - \frac{1}{2} k(Δℓ+d')^2 + F\cdot d'$

$0 = m_{ολ} g d' + \cancel{\frac{1}{2} kΔℓ^2} - \cancel{\frac{1}{2} kΔℓ^2} - \frac{1}{2} k d'^2 - kΔℓ\cdot d' + F d'$

$0 = \underbrace{(m_{ολ}g - kΔℓ)}_{0 \text{ από ΘΙ}} d' - \frac{1}{2} k d'^2 + F d' \Rightarrow F d' = \frac{1}{2} k d'^2 \Rightarrow d' = \frac{2F}{k}$

$\Rightarrow d' = \frac{2\cdot 40}{100} \Rightarrow d' = 0{,}8m = A'$

Επειδή $A' = 0{,}8m > Δℓ = 0{,}4m$ το $Σ_2$ χάνει την επαφή στη ΘΦΜ

ΑΔΕΤ στη ΘΦΜ: $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} kA'^2 = \frac{1}{2} m_{ολ} v'^2 + \frac{1}{2} kΔℓ^2$

$|v'| = ω\sqrt{A'^2 - Δℓ^2} = 5\sqrt{0{,}64-0{,}16} = 5\sqrt{0{,}48} = 5\sqrt{\frac{48}{100}} = 5\sqrt{\frac{3\cdot 16}{100}}$

$|v'| = \frac{5\cdot 4\sqrt{3}}{10} \Rightarrow |v'| = 2\sqrt{3}\ m/s$

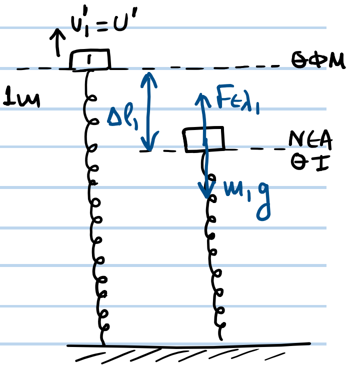
Στη συνέχεια το $Σ_2$ εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω και μέχρι να σταματήσει διανύει κατακόρυφη απόσταση h.

ΘΜΚΕ για $m_2$ από τη ΘΦΜ μέχρι το μέγιστο ύψος:

$\cancel{K_{2τελ}}^{0} - K_{2αρχ,ΘΦΜ} = W_{m_2 g} \Rightarrow -\frac{1}{2} m_2 v'^2 = -m_2 g h \Rightarrow h = \frac{v'^2}{2g} = \frac{12}{20} \Rightarrow h = 0{,}6m$

Οπότε η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση που διανύει το $Σ_2$ είναι $h_{max} = A' + Δℓ + h = 0{,}8+0{,}4+0{,}6 \Rightarrow \boxed{h_{max} = 1{,}8m}$

β) Το $Σ_1$ μετά την απώλεια επαφής εκτελεί νέα ααт γύρω από τη ΝΕΑ ΘΙ: $ΣF_1 = 0 \Rightarrow m_1 g = F_{ελ,1} \Rightarrow m_1 g = kΔℓ_1 \Rightarrow Δℓ_1 = \frac{m_1 g}{k} = 0{,}1m$




ΑΔΕΤ στη ΘΦΜ για τη νέα ααт που εκτελεί το $Σ_1$

$E_1 = K_1 + U_1 \Rightarrow K_{1max} = \frac{1}{2} m_1 v'^2 + \frac{1}{2} kΔℓ_1^2 = \frac{1}{2} 1\cdot 12 + \frac{1}{2} 100\frac{1}{100}$

$E_1 = K_{1max} \Rightarrow \boxed{K_{1max} = 6{,}5J}$