

21/11/2021

Διαγώνισμα Άλγεβρα Α' Λυκείου

(Λύσεις)

Θέμα Α

Α₁ Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 54

Α₂

i) $(a+b)^2$

ii) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

iii) $a \neq 0$ & $b \neq 0$

iv) $(a-b)(a+b)$

v) $\frac{a^k}{a^2}$

vi) 1

vii) $\frac{1}{a^2}$

viii) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

ix) $a^k \cdot b^k$

x) a^{k^2}

Α₃

i) \wedge

ii) Σ

iii) \wedge

iv) Σ

v) Σ

Θέμα Β

B₁ $(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 =$
 $= x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$

B₂ $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \quad \begin{cases} \text{κ}' \\ \text{κ}' \end{cases} \quad \begin{cases} y+3=0 \\ y=-3 \end{cases}$$

Θέμα Γ

$$\begin{aligned} \textcircled{\Gamma_1} \quad \Pi &= AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EZ + ZA = \\ &= x + 2x + x + y + x + y + x = \\ &= 6x + 2y \end{aligned}$$

$$\textcircled{\Gamma_2} \quad \text{Αφού } 2 < x < 3 \text{ τότε } 2 \cdot 6 < 6x < 3 \cdot 6$$

$$\Leftrightarrow 12 < 6x < 18 \quad \textcircled{1}$$

$$\text{Αφού } 1 < y < 4 \text{ τότε } 1 \cdot 2 < 2y < 4 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 2 < 2y < 8 \quad \textcircled{2}$$

$$\text{Από } \textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow 12 + 2 < 6x + 2y < 18 + 8$$

$$\Rightarrow 14 < \Pi < 26$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\Gamma_3} \quad \text{i) } K &= \frac{x^3 + 2x^2 - 4x^2 - 2xy}{x^2y - 2xy^2 + y^3} : \frac{x^2 + 2y + yx + 2x}{x^2 - y^2} = \\ &= \frac{x(x^2 + 2x - 4x - 2y)}{y \cdot (x^2 - 2xy + y^2)} : \frac{x^2 + 2x + 2y + yx}{(x-y)(x+y)} = \\ &= \frac{x[x(x+2) - y \cdot (x+2)]}{y \cdot (x-y)^2} : \frac{x(x+2) + y(x+2)}{(x-y)(x+y)} = \\ &= \frac{x \cdot (x+2) \cdot (x-y)}{y \cdot (x-y)^2} \cdot \frac{(x-y)(x+y)}{(x+2)(x+y)} = \\ &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

$$\text{ii) Αφού } 2 < x < 3 \quad \textcircled{1} \quad \begin{cases} \text{κ}' \\ \text{κ}' \end{cases} \quad 1 < y < 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{1}{y} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{y} < 1 \quad \textcircled{2}$$

$$\text{Από } \textcircled{1} \cdot \textcircled{2} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} < x \cdot \frac{1}{y} < 3 \cdot 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{x}{y} < 3$$

Θέμα Δ

$$\begin{aligned} \textcircled{\Delta_1} \quad A \leq 3ab &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 &\leq 3ab \\ \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow a-b &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\Delta_2} \quad \text{Έστω } A \geq B \text{ . Τότε } a^2 + ab + b^2 &\geq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 &\geq \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 4a^2 + 4ab + 4b^2 &\geq a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3a^2 + 6ab + 3b^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 3 \cdot (a^2 + 2ab + b^2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 3 \cdot (a+b)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

16xύει

Αρα $A \geq B$

$$\begin{aligned} \textcircled{\Delta_3} \quad A \geq 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2a^2 + 2ab + 2b^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + a^2 + 2ab + b^2 + b^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + (a+b)^2 + b^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

16xύει

$$\begin{aligned} \textcircled{\Delta_4} \quad \bullet \quad \frac{A-4B}{3} &\leq 2B+ab \\ \Leftrightarrow \frac{a^2+ab+b^2-4 \cdot \frac{(a-b)^2}{4}}{3} &\leq 2 \cdot \frac{(a-b)^2}{4} + ab \\ \Leftrightarrow \frac{a^2+ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{3} &\leq \frac{(a-b)^2}{2} + ab \end{aligned}$$

EXIT=6

$$\Leftrightarrow 6ab \leq 3 \cdot (a-b)^2 + 6ab$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (a-b)^2 \geq 0 \quad 16xύει$$

$$\bullet 2B + ab \leq A$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{(a-b)^2}{4} + ab \leq a^2 + ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2} \leq a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 0$$

16x161