# Διαγώνισμα Προσανατολισμού Μαθηματικών
## Β' Λυκείου 12-12-2021

## Θέμα Α

Α1. σελ) 41 σχολικού
Α2. σελ) 43 σχολικού

Α3. (i) Σ, (ii) Λ, (iii) Λ
(iv) Λ, (v) Λ

## Θέμα Β

(i) $\lambda = \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{4} = \varepsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = -1$.

Άρα $y - 5 = -(x+3) \Leftrightarrow \boxed{y = -x + 2}$

(ii) $3y + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow 3y = -2x + 8 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$. $\varepsilon_1$

Έστω $\varepsilon_2$ η ευθεία που ψάχνουμε

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\lambda_{\varepsilon_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = \frac{3}{2}.$$

$$\varepsilon_2 : y + 3 = \frac{3}{2}(x+2) \Leftrightarrow y + 3 = \frac{3}{2}x + 3 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}x}$$

(iii) $\lambda_{\vec{\delta}} = \frac{0}{3} = 0$. Άρα $\boxed{y = -5}$

(iv) Έστω Ε το σημείο τομής των $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$. Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 & \cdot(-2) \\ 2x - 3y = -21 & \cdot(3) \end{cases} \quad \begin{array}{l} -\cancel{6x} - 8y = -22 \\ \cancel{6x} - 9y = -63 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -17y = -85 \\ \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = 5 \\ 3x + 20 = 11 \Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -3 \end{array}$$

Άρα $E(-3, 5)$
Επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι της μορφής

$y = \lambda x$. Τότε $5 = \lambda(-3) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{3}$.

Άρα $\boxed{y = -\frac{5}{3}x}$

(v) Η διχοτόμος είναι η $y=-x$. Επειδή η ευθεία που ψάχνουμε θέλουμε να είναι παράλληλη στην διχοτόμο η κλίση της είναι $\lambda=-1$. Άρα

$$y-3=-(x+1) \Leftrightarrow \boxed{y=-x+2}$$

__Θέμα Γ__

__Γ1__ (i) $\vec{AB}=(a-a-1,\ 4-3)=(-1,1)$

$\vec{A\Gamma}=(-4-a-1,\ 5a+1)=(-5-a,\ 5a+1)$

$\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5-a & 5a+1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -5a-1+5+a=0 \Leftrightarrow -4a=4 \Leftrightarrow \boxed{a=1}$

(ii) Αν $a=1$ $\vec{AB}=(-1,1)$ και $\vec{A\Gamma}=(-6,6)$

Τότε $\vec{A\Gamma}=(-6,6)=6(-1,1)=6\vec{AB}$

Άρα για $\lambda=6$ $\vec{A\Gamma}\uparrow\uparrow\vec{AB}$

__Γ2__

(i) $\vec{\beta}\cdot\vec{u}=\vec{\beta}(\vec{a}+2\vec{\beta})=\vec{\beta}\vec{a}+2|\vec{\beta}|^2 \overset{(*)}{=} -\sqrt{6}+2\cdot 2=-\sqrt{6}+4$.

(*) $\vec{\beta}\cdot\vec{a}=|\vec{\beta}|\cdot|\vec{a}|\,\text{συν}(\widehat{\vec{\beta},\vec{a}})=2\sqrt{2}\,\text{συν}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=$

$=2\sqrt{2}\,\text{συν}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\left(-\text{συν}\frac{\pi}{6}\right)=-\cancel{2}\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}=-\sqrt{6}$.

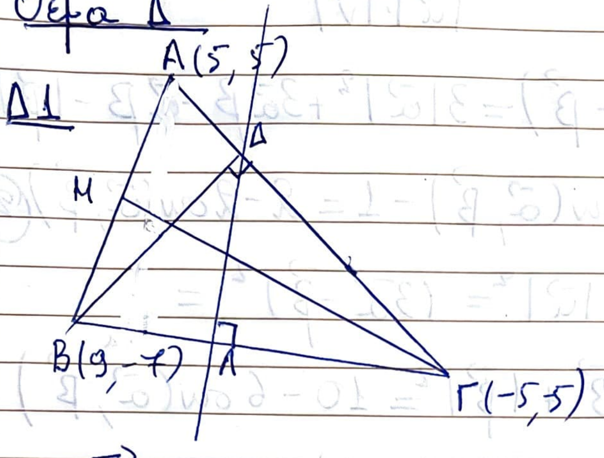
(ii) $|\vec{u}|=|\vec{a}+2\vec{\beta}|$. Υψώνουμε στο τετράγωνο

$|\vec{u}|^2=(\vec{a}+2\vec{\beta})^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{\beta}+4|\vec{\beta}|^2=$

$=4+4\sqrt{6}+8=12-4\sqrt{6}$. Άρα $|\vec{u}|=\sqrt{12-4\sqrt{6}}$

## Θέμα Δ

**Δ1**




(i) $\vec{AB} = (9-5, -7-5) = (4, -12)$
$\vec{A\Gamma} = (-5-5, -5-5) = (-10, -10)$

$\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -10 & -10 \end{vmatrix} = -40 + 120 = 80 \neq 0$

Άρα $\vec{AB} \not\parallel \vec{A\Gamma}$ άρα A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

(ii) $\lambda_{A\Gamma} = \frac{-5-5}{-5-5} = \frac{-10}{-10} = +1$

$\lambda_{B\Delta} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} = 1$. Η ΒΔ διέρχεται από το Β οπότε

$B\Delta: y+7 = -1(x-9) \Leftrightarrow y+7 = x+9 \Leftrightarrow \boxed{y = -x+2}$

(iii) Μ μέσον της ΑΓ. Άρα $x_M = \frac{9+5}{2} = 7$ και $y_M = \frac{-7+5}{2} = -1$.

Άρα $M(7, -1)$. Τότε $\lambda_{\Gamma M} = \frac{-1+5}{7+5} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Άρα $\Gamma M: y+5 = \frac{1}{3}(x+5) \Leftrightarrow y+5 = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}}$

(iv) Έστω Λ το μέσον της ΒΓ. Άρα $x_\Lambda = \frac{9-5}{2} = 2$ και $y_\Lambda = \frac{-7-5}{2} = -6$.

Άρα $\Lambda(2, -6)$. Επίσης $\lambda_{B\Gamma} = \frac{-5+7}{-5-9} = \frac{2}{-14} = -\frac{1}{7}$.

Η μεσοκάθετος $\varepsilon \perp B\Gamma$. Άρα $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 7$.

$\varepsilon: y+6 = 7(x-2) \Leftrightarrow \boxed{y = 7x-20}$

**Δ2** Έχουμε ότι: $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$ (1)

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (3\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = 3|\vec{\alpha}|^2 + 3\vec{\alpha}\beta - \vec{\alpha}\beta - |\vec{\beta}|^2 =$$

$$= 3 + 2|\vec{\alpha}||\beta|\,\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}) - 1 = 2 - 2\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}) \quad (2)$$

$|\vec{u}| = |3\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$ Άρα $|\vec{u}|^2 = (3\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2 =$

$$= 9|\vec{\alpha}|^2 - 6\vec{\alpha}\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 10 - 6\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$$

Άρα

$$|\vec{u}| = \sqrt{10-6\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})} \quad (3)$$

$|\vec{v}| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$, Άρα $|\vec{v}|^2 = (\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 =$

$= 2 + 2\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ Άρα $|\vec{v}| = \sqrt{2+2\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})}$ (4)

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα διότι τότε και οι γραμμικοί συνδυασμοί τους θα ήταν διανύσματα παράλληλα. Όμως $\vec{u} \nparallel \vec{v}$.
Οπότε $2+2\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}) \neq 0$.
Αντικαθιστούμε τις (2), (3) και (4) στην (1).

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{2+2\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})}{\sqrt{10-6\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})}\,\sqrt{2+2\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{(2+2\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}))^{\cancel{2}}}{(10-6\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}))\cancel{(2+2\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}))}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 - 6\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 8 + 8\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -14\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = -2 \Leftrightarrow \boxed{\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{1}{7}}$$