ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘ. Γ ΛΥΚΕΙΟΥ 13/11/2021

ΘΕΜΑ Α $\boxed{A4}$ 1 Λ 2 Λ 3 Λ 4 Λ 5 Σ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\boxed{B1}$

• f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμ.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = -1 \rightarrow \boxed{y=-1}$ οριζόντια ασύμ. στο $-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = 1 \rightarrow \boxed{y=1}$ οριζόντια ασύμ. στο $+\infty$

$\boxed{B2}$

Η f είναι παρ/μη ως πράξεις παρ/μων με:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x+1-e^x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

άρα $f \uparrow$ κ' συνεχής στο $\mathbb{R} \rightarrow f(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-1,1)$

• Για $y \in f(A) = (-1,1)$ κ' $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $f(x)=y$:

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1} = y \Leftrightarrow e^x - 1 = e^x y + y \Leftrightarrow e^x(1-y) = 1+y$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\frac{1+y}{1-y}$$ άρα $f^{-1}(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1,1)$

B3 α) $g(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$, $x\in(-1,1)$ ΠΑΡ/ΜΗ ΩΣ

ΣΥΝΘΕΣΗ Κ' ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΑΡ/ΜΩΝ ΜΕ:

$g'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}>0$ άρα $g \uparrow$ στο $(-1,1)$

β) Έστω, $M(x_0, g(x_0))$ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ

ΤΟΤΕ: $g'(x_0)=\frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x_0}+\frac{1}{1-x_0}=\frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1-\cancel{x_0}+1+\cancel{x_0}}{1-x_0^2}=\frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{\cancel{2}}{1-x_0^2}=\frac{\cancel{8}^{\,4}}{3}$

$\Leftrightarrow 3=4-4x_0^2 \Leftrightarrow 4x_0^2=1 \Leftrightarrow x_0=\pm\frac{1}{2}$

▸ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ $M_1\left(-\frac{1}{2}, \ln\frac{1}{3}\right)$

(ε_1): $y-g\left(-\frac{1}{2}\right)=g'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$y-\ln\frac{1}{3}=\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}$

άρα $\boxed{y=\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}-\ln 3}$

▸ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ $M_2\left(\frac{1}{2}, \ln 3\right)$

(ε_2): $y-g(1/2)=g'(1/2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow y-\ln 3=\frac{8}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$y-\ln 3=\frac{8}{3}x-\frac{4}{3}$

άρα $\boxed{y=\frac{8}{3}x-\frac{4}{3}+\ln 3}$

ΘΕΜΑ Γ

$\boxed{\Gamma_1}$ Για $x \neq 0$: $f(x) = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$ ΠΑΡ/ΜΗ ΩΣ ΣΥΝΘΕΣΗ Κ' ΠΡΑΞΕΙΣ:

$$f'(x) = 2x\eta\mu\frac{1}{x} + x^2 \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$$

▸ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} = 0 \in \mathbb{R}$

$$\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq |x| \iff \underset{\downarrow\, 0}{-|x|} \leq \underset{\downarrow^{\text{κ.π.}}\, 0}{x\eta\mu\frac{1}{x}} \leq \underset{\downarrow\, 0}{|x|}$$

άρα $f'(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$\boxed{\Gamma_2}$ (ε): $y - f(0) = f'(0)(x-0) \iff y - 0 = 0 \iff y = 0$

• $f(x) = 0 \iff x^2\eta\mu\frac{1}{x} = 0 \underset{x\neq 0}{\iff} \eta\mu\frac{1}{x} = 0 \iff \frac{1}{x} = \kappa\pi \iff x = \frac{1}{\kappa\pi}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\Gamma_3}$ $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x} - x\right) \underset{\substack{\frac{1}{x}=u \\ u\to 0^-}}{=}$

$$\lim_{u\to 0^-}\left(\frac{1}{u^2}\eta\mu u - \frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu u - u}{u^2} \underset{\text{DLH}}{\overset{0/0}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} = 0$$

Ομοίως $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x) - x) = \dots = 0$

άρα $y = x$ ΑΣΥΜ. ΤΗΣ C_f ΣΤΟ $\pm\infty$

$\boxed{\Gamma_4}$ • $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \iff x^2\eta\mu\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\eta\mu x \underset{x\neq 0}{\iff} x^4\eta\mu\frac{1}{x} - \eta\mu x = 0$

Θεωρούμε $g(x) = x^4 \cdot \eta\mu\frac{1}{x} - \eta\mu x$, $x \in \left[\frac{1}{\pi}, \pi\right]$ συνεχής ως πράξεις συνεχών

• $g\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi^4}\cdot\eta\mu\pi - \eta\mu\frac{1}{\pi} = -\eta\mu\frac{1}{\pi} < 0$ αφού $\frac{1}{\pi} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

• $g(\pi) = \pi^4 \cdot \eta\mu\frac{1}{\pi} > 0$ άρα $g\left(\frac{1}{\pi}\right)g(\pi) < 0$ Θ. Bolzano ...

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$

- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2)$
- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \alpha f(x_1) = \alpha f(x_2)$

οπότε $-x_1 + \beta = -x_2 + \beta \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα 1-1

▸ Για $y \in f(A) = \mathbb{R}$ κ' $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $f(x) = y$:

$$y^3 + \alpha y = -x + \beta \Leftrightarrow x = -y^3 - \alpha y + \beta$$

οπότε $f^{-1}(x) = -x^3 - \alpha x + \beta,\ x \in \mathbb{R}$

Δ2 Επειδή $y = -x + 3$ (εφ) της C_f στο $(0,3)$ τότε:

α)
$$\begin{cases} g'(0) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ g(0) = 3 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 3} \end{cases}$$

β) Είναι, $f(f^{-1}(x)) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(f^{-1}(x)) = \lim\limits_{x \to 0} x \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(f^{-1}(x)) = 0$

$\overset{**}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{u\to 3} f(u) = 0 = f(3)$

** (θέτουμε $u = f^{-1}(x)$, $u \to f^{-1}(0) = 3$)

οπότε f συνεχής στο $x_0 = 3$

- $f'(3) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{x-3} \underset{\substack{x = f^{-1}(u) \\ u \to 0\,*}}{=\!=} \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{f(f^{-1}(u))}{f^{-1}(u) - 3} =$

$= \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u}{-u^3 - u} = -1 = \text{εφ}\dfrac{3\pi}{4}$

* Θέτουμε $x = f^{-1}(u) \Leftrightarrow f(x) = u$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) = 0$ άρα $u \to 0$

β' τρόπος σελ. 7

γ) Εφαπτομένη της C_g στο $K(x_0, g(x_0))$:

(ε): $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$

$y = g'(x_0)x - x_0 g'(x_0) + g(x_0)$

$y = (-3x_0^2 - 1)x - x_0(-3x_0^2 - 1) - x_0^3 - x_0 + 3$

$y = (-3x_0^2)x - x + 3x_0^3 + x_0 - x_0^3 - x_0 + 3$

$\boxed{y = -3x_0^2 x - x + 2x_0^3 + 3}$

• Κοινά σημεία C_g και (ε):

$g(x) = y \Leftrightarrow -x^3 - \cancel{x} + \cancel{3} = -3x_0^2 x - \cancel{x} + 2x_0^3 \cancel{+3}$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x_0^2 x + 2x_0^3 = 0$

1	0	$-3x_0^2$	$2x_0^3$	$\lfloor x_0$
$\downarrow$	x_0	x_0^2	$-2x_0^3$	
1	x_0	$-2x_0^2$	$\lfloor 0$	

Οπότε $(x - x_0)(x^2 - x_0 x - 2x_0^2) = 0$

$\Leftrightarrow x = x_0$ ή $x^2 - x_0 x - 2x_0^2 = 0$

$\Delta = x_0^2 + 8x_0^2 = 9x_0^2 > 0 \quad x_0 \neq 0$

Άρα έχει και άλλο κοινό σημείο

(c)

δ). • g συνεχής στο $[0,2]$ ως πολ/κή

$g(0)=3>0$

$g(2)=-8-2+3=-10+3=-7<0$

άρα $g(0)\cdot g(2)<0$ οπότε από Θ. Bolzano $\exists\, x_1\in(0,2)$:

$g(x_1)=0$

Θεωρούμε $h(x)=g(x)\cdot\left(x^{2021}+k\cdot x^{2020}+\lambda x+1\right)-e^{2x}$, $x\in[0,x_1]$

• h συνεχής στο $[0,x_1]$ ως πράξεις συνεχών

• $h(0)=g(0)\cdot 1-e^{0}=3-1=2>0$

$h(x_1)=g(x_1)\left(x_1^{2021}+k\cdot x^{2020}+\lambda x_1+1\right)-e^{2x_1}=-e^{2x_1}<0$

άρα $h(0)h(x_1)<0$ οπότε από Θ. Bolzano η

εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow g(x)\left(x^{2021}+kx^{2020}+\lambda x+1\right)=e^{2x}$

έχει μια τουλ. ρίζα στο $(0,x_1)\subseteq(0,2)$.

β' τρόπος $\boxed{\Delta 2}$ (β)

Είναι, $f^3(x)+f(x)=-x+3 \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=-x+3$

$\Leftrightarrow \boxed{f(x)=\dfrac{-x+3}{f^2(x)+1}}$ (1) $\Rightarrow |f(x)|=\dfrac{|-x+3|}{f^2(x)+1}\le|-x+3|$

άρα $-|-x+3|\le f(x)\le|-x+3|$

$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to3}(-|x+3|)=0\\&\lim_{x\to3}|x+3|=0\end{aligned}\right\}$ από κ.π. $\lim_{x\to3}f(x)=0=f(3)$ άρα f συνεχής $x_0=3$

► $f'(3)=\lim_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x-3}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to3}\dfrac{-x+3}{(f^2(x)+1)(x-3)}=\lim_{x\to3}\dfrac{-1}{f^2(x)+1}=-1$

$=\varepsilon\varphi\dfrac{3\pi}{4}$