ΛΥΣΗΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

9/10/2021

ΘΕΜΑ Α

A5 1. Λ 2. Λ 3. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1 Η f είναι παρ/μη ως πολ/κη με: $f'(x) = 3x^2 \geq 0$

άρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε και 1-1

- Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y$

οπότε $x = \sqrt[3]{y}$, $y \geq 0$ ή $x = -\sqrt[3]{-y}$, $y < 0$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \\ \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

B2 $f^{-1}(f(|x|-3)+9) > 1 \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} f(|x|-3)+9 > f(1)$

$\Leftrightarrow f(|x|-3) > -8 \Leftrightarrow f(|x|-3) > f(-2) \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}$

$|x|-3 > -2 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x > 1$ ή $x < -1$

B3 $$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \\ \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} = \lim_{x\to 0^+} x^{-\frac{2}{3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$$

άρα η f δεν είναι παρ/μη στο $x_0 = 0$

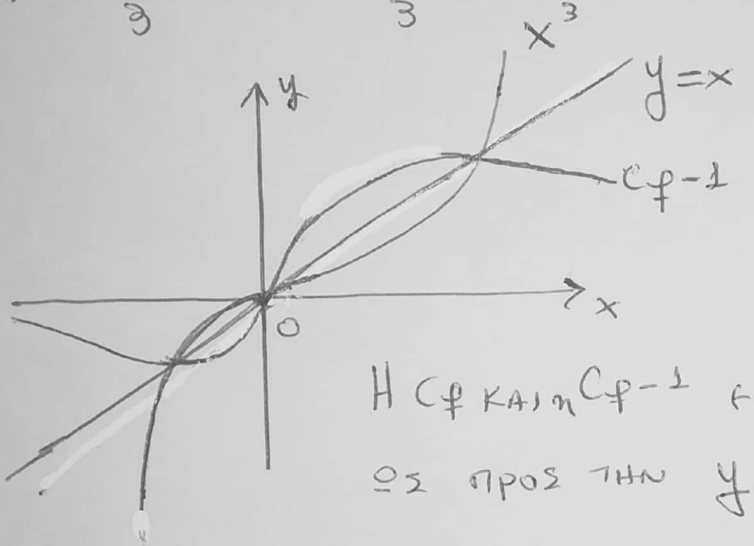
▸ Για $x<0$: $f(x) = -\sqrt[3]{-x}$ ΠΑΡ/ΜΗ ΩΣ ΣΥΝΘΕΣΗ ΠΑΡ/ΜΩΝ ΜΕ:

$$f'(x) = \left(-(-x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(-x)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}(-x)^{-\frac{2}{3}}$$

▸ Για $x>0$: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ ΠΑΡ/ΜΗ ΩΣ ΣΥΝΘΕΣΗ ΠΑΡ/ΜΩΝ ΜΕ:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$\boxed{B4}$



Η C_f ΚΑΙ η $C_{f^{-1}}$ ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ $y=x$

ΘΕΜΑ Γ

$\boxed{\Gamma_1}$ Η f ΕΙΝΑΙ ΠΑΡ/ΜΗ ΩΣ ΣΥΝΘΕΣΗ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΑΡ/ΜΩΝ ΜΕ:

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$ άρα $f \uparrow$ οπότε κ' "1-1"

• Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = y$

$\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 2y$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2e^x y \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x y = 1$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x y + y^2 = 1 + y^2$

$\Leftrightarrow (e^x - y)^2 = 1 + y^2$

$\Leftrightarrow e^x - y = \sqrt{1+y^2}$ ή $e^x - y = -\sqrt{1+y^2}$

$\Leftrightarrow \boxed{e^x = \sqrt{1+y^2} + y}$ ή $e^x = -\sqrt{1+y^2} + y$

• $1 > 0 \Leftrightarrow 1 + y^2 > y^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} > |y|$

$|y| \geq -y$ $\qquad$ $|y| \geq y$

$\sqrt{1+y^2} > -y$ $\qquad$ $\sqrt{1+y^2} > y$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} + y > 0$ $\qquad$ $\Leftrightarrow 0 > y - \sqrt{1+y^2}$

Άρα, $e^x = \sqrt{1+y^2} + y \Rightarrow x = \ln(\sqrt{1+y^2}+y)$

άρα $f^{-1}(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$, $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\Gamma_2}$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ f''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = f(x) \\ f'''(x) = f'(x) \end{cases}$$

$3f''(x) - f'(x) = 3f'''(x) - f(x) - 4e \Leftrightarrow$

$3f(x) - f'(x) = 3f'(x) - f(x) - 4e \Leftrightarrow$

$4f(x) - 4f'(x) = -4e \Leftrightarrow$

$2(e^x - e^{-x}) - 2(e^x + e^{-x}) = -4e$

$e^x - e^{-x} - e^x - e^{-x} = -2e \Leftrightarrow -2e^{-x} = -2e$

$\Leftrightarrow e^{-x} = e \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = -1}$

$\boxed{\Gamma_3}$ Η g ΠΑΡ/ΜΗ ΩΣ ΣΥΝΘΕΣΗ ΠΑΡ/ΜΩΝ ΜΕ :

$$g'(x) = \dots = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

- $$g''(x) = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$\boxed{\Gamma_4}$ - $\lim_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x^2+1}) \overset{+\infty+\infty}{=} +\infty$

οπότε $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+\sqrt{x^2+1}) = +\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} (x+\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 1}{x - \sqrt{x^2+1}} \overset{\frac{-1}{-\infty}}{=} 0$

οπότε $\lim_{x\to-\infty} \ln(x+\sqrt{x^2+1}) = -\infty$

ΘΕΜΑ Δ

$\boxed{Δ1}$ Επειδή $θ \in [0, \frac{\pi}{2})$ τότε $0 \le ημθ < 1$

άρα $f(ημθ) = ημ^2θ + ημθ + 1$

$$\begin{array}{rl} \cdot & 0 \le ημ^2θ < 1 \\ + & 0 \le ημθ < 1 \\ \hline & 0 \le ημ^2θ + ημθ < 2 \overset{+1}{\iff} 1 \le ημ^2θ + ημθ + 1 < 3 \end{array}$$

άρα $f(f(ημθ)) = f(ημ^2θ + ημθ + 1) = ημ^2θ + ημθ + 1 - ημθ + 1$

$= ημ^2θ + 2$

ΕΙΝΑΙ: $f(f(ημθ)) = θ^2 + 2 \iff ημ^2θ + 2 = θ^2 + 2$

$\iff ημ^2θ = θ^2$

$\iff |ημθ| = |θ| \iff θ = 0$ ΑΠΟ ΒΑΣΙΚΗ ΑΝΙΣΩΣΗ $|ημx| \le |x|$, $x \in \mathbb{R}$ ΚΑΙ ΤΟ ΙΣΟΝ ΙΣΧΥΕΙ ΜΟΝΟ ΟΤΑΝ $x = 0$

$\boxed{Δ2}$ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & 0 \le x < 1 \\ x + 1, & 1 \le x \le 5 \end{cases}$

Για $x \in [0, 1)$ θέτουμε $f(x) = y \iff x^2 + 1 = y$

$\iff x^2 = y - 1 \quad (y \ge 1)$

$\iff |x| = \sqrt{y-1} \underset{x \ge 0}{\iff} x = \sqrt{y-1}$

$\cdot \; 0 \le x < 1 \iff 0 \le \sqrt{y-1} < 1 \iff 0 \le y - 1 < 1 \iff 1 \le y < 2$

οπότε $f(A_1) = f([0,1)) = [1, 2)$

Για $x \in [1,5]$ θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow x+1=y \Leftrightarrow x=y-1$

- $1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq y-1 \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 6$

οπότε $f(A_2)=f([1,5])=[2,6]$

Τελικά, $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=[1,6]$

$\boxed{\Delta 3}$ Για $x \in [0,1)$: $f(x)=x^2+1$

Η f είναι παρ/μη ως πολ/κη με: $f'(x)=2x \geq 0$

άρα $f \uparrow$ στο $[0,1)$ και για $x \in (1,5)$: $f'(x)=1>0$

άρα $f \uparrow$

Για $x \in (0,1)$ έχουμε:

- $x^2>x^3 \Leftrightarrow e^{x^2}>e^{x^3} \underset{x\in(1,5)}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}} f(e^{x^2})>f(e^{x^3})$ (1)
- $\sqrt{x}>x \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}>e^{x} \underset{x\in(1,5)}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}} f(e^{\sqrt{x}})>f(e^{x})$ (2)

$(1)+(2) \Leftrightarrow f(e^{x^2})+f(e^{\sqrt{x}})>f(e^{x^3})+f(e^{x}),\ \forall x\in(0,1)$

άρα όταν $x\in(0,1)$ η εξίσωση είναι αδύνατη

Προφανής ρίζα $\boxed{x=0}$ μοναδική λύση της εξίσωσης

$\boxed{\Delta 4}$ $A_h=A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, g(x)\in[0,5]\}$

Από σχήμα βλέπουμε $0\leq g(x)\leq 5$ όταν

$x\in\left[-\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right]\cup[1,3]=A_h$