Λυσεις Μαθηματικων Προσανατολισμου 31/10/21

Θεμα Α

Α1. Σχολικο σελ 13.

Α2. Σχολικο σελ 21

Α3. (i) Λ, (ii) Λ, (iii) Λ

Α4. $\vec{AE} - \vec{H\Gamma} = \vec{\Delta Z} + \vec{BH} - \vec{EZ}$

$\Leftrightarrow \vec{AE} + \vec{EZ} - \vec{\Delta Z} = \vec{BH} + \vec{H\Gamma}$

$\Leftrightarrow \vec{AZ} + \vec{Z\Delta} = \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow \boxed{\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}}$ Αρα ΑΒΓΔ παρ/μο.

Α5. (i) $\lambda^2 + 3\lambda = 0$ και $\lambda^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda(\lambda+3) = 0$ και $\lambda^2 = 9$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\boxed{\lambda = -3}$ και $\lambda = 3$ ή $\boxed{\lambda = -3}$

Για να ειναι το μηδενικο πρεπει $\lambda = -3$.

(ii) $\vec{\alpha} \parallel x'x$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0} \Leftrightarrow y = 0$ και $x \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 3}$

(iii) $\vec{\alpha} \parallel y'y$ και $\vec{\alpha} \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $y \neq 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

(iv) Πρεπει $\lambda^2 + 3\lambda = -\lambda + 5$ και $\lambda^2 - 9 = -3\lambda + 1$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$ και $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$

$\Delta = 36$ $\qquad$ $\Delta = 49$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 6}{2}$ και $\lambda_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 7}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} -5 \\ 1 \end{cases}$ $\qquad$ $\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}$

Πρεπει $\boxed{\lambda = -5}$

Θέμα Β

Β1. Ψάχνουμε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} \iff$$

$$\iff (-1,15) = \kappa(4,6) + \lambda(-3,1) \iff$$

$$\iff (-1,15) = (4\kappa, 6\kappa) + (-3\lambda, \lambda) \iff$$

$$\iff (-1,15) = (4\kappa - 3\lambda, 6\kappa + \lambda) \iff$$

$$\iff \begin{cases} 4\kappa - 3\lambda = -1 \\ 6\kappa + \lambda = 15 \end{cases} \Bigg| \cdot 3 \quad \Bigg| \begin{array}{l} 4\kappa - \cancel{3\lambda} = -1 \\ 18\kappa + \cancel{3\lambda} = 45 \end{array} \Bigg| \quad 22\kappa = 44 \quad \Bigg| \begin{array}{l} \kappa = 2 \\ \lambda = 3 \end{array}$$

Άρα $\boxed{\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}}$

Β2. (i) $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} - \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} - 5\vec{\gamma} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$

$\vec{A\Gamma} = \vec{O\Gamma} - \vec{OA} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma} - \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} - 5\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.

(ii) $\vec{A\Gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma} = -(-2\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}) = -\vec{AB}$.

Άρα τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

Β3. Έστω σημείο αναφοράς το Α.

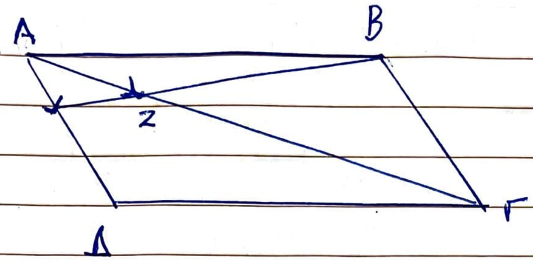
$$5\vec{A\Delta} - 3\vec{AE} - 4(\vec{A\Gamma} - \vec{A\Delta}) = 4(\vec{AB} - \vec{AE}) - (\vec{A\Gamma} - \vec{AE}) + 9(\vec{A\Delta} - \vec{AB})$$

$$\iff 5\cancel{\vec{A\Delta}} - 3\cancel{\vec{AE}} - 4\vec{A\Gamma} + 4\cancel{\vec{A\Delta}} = 4 \quad - 4\cancel{\vec{AE}} - \vec{A\Gamma} + \cancel{\vec{AE}} + 9\cancel{\vec{A\Delta}} - 9\vec{AB}$$

$$\iff -3\vec{A\Gamma} = -5\vec{AB} \iff \vec{A\Gamma} = \frac{5}{3}\vec{AB}$$

Άρα Α, Β και Γ συνευθειακά.

B4.



(i) $\vec{EZ} = \vec{EA} + \vec{AZ} = -\vec{AE} + \vec{AZ} = -\frac{2}{5}\vec{A\Delta} + \frac{2}{7}\vec{A\Gamma} = -\frac{2}{5}\vec{A\Delta} + \frac{2}{7}(\vec{AB} + \vec{B\Gamma})$

$$= -\frac{2}{5}\vec{A\Delta} + \frac{2}{7}\vec{AB} + \frac{2}{7}\vec{A\Delta} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\vec{EZ} = \frac{2}{7}\vec{AB} - \frac{4}{35}\vec{A\Delta}}$$

$$\vec{ZB} = \vec{ZA} + \vec{AB} = -\frac{2}{7}\vec{A\Gamma} + \vec{AB} = -\frac{2}{7}(\vec{AB} + \vec{B\Gamma}) + \vec{AB} =$$

$$= -\frac{2}{7}\vec{AB} - \frac{2}{7}\vec{A\Delta} + \vec{AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{ZB} = \frac{5}{7}\vec{AB} - \frac{2}{7}\vec{A\Delta}}$$

(ii) Εστω οτι υπαρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ ωστε

$$\vec{ZB} = \kappa\vec{EZ} \Leftrightarrow \frac{5}{7}\vec{AB} - \frac{2}{7}\vec{A\Delta} = \kappa\left(\frac{2}{7}\vec{AB} - \frac{4}{35}\vec{A\Delta}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{7}\vec{AB} - \frac{2}{7}\vec{A\Delta} = \frac{2\kappa}{7}\vec{AB} - \frac{4\kappa}{35}\vec{A\Delta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{7} - \frac{2\kappa}{7}\right)\vec{AB} + \left(\frac{4\kappa}{35} - \frac{2}{7}\right)\vec{A\Delta} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{7} - \frac{2\kappa}{7} = 0 \\ \frac{4\kappa}{35} - \frac{2}{7} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\kappa}{7} = \frac{5}{7} \\ \frac{4\kappa}{35} = \frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \frac{5}{2} \\ \kappa = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Αρα $\vec{ZB} = \frac{5}{2}\vec{EZ}$. Αρα Ζ, Β και Ε συνευθειακα.

ΛΥΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Βιβλίο ΕΛ σελ. 35

Γ2. Βιβλίο ΕΛ σελ. 45

Γ3. Βιβλίο ΕΛ σελ. 42

Γ4. Σ-Λ: i) Λ ii) Λ iii) Σ iv) α) Λ
β) Σ

v) Λ vi) Λ vii) Λ viii) Σ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$D = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 5 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+2) - 5 = \lambda^2 - 4 - 5 = \lambda^2 - 9$$
$$= (\lambda-3)(\lambda+3)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 5(\lambda+2) - 25 = 5\lambda + 10 - 25$$
$$= 5\lambda - 15 = 5(\lambda-3)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5(\lambda-2) - 5 = 5(\lambda-3)$$

<u>1η περ.</u>: Αν $D \neq 0$, δηλ. $(\lambda-3)(\lambda+3) \neq 0 \iff \lambda \neq \pm 3$

τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{5(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)},\frac{5(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)}\right)$$
$$=\left(\frac{5}{\lambda+3},\frac{5}{\lambda+3}\right)$$

<u>2η περ:</u> $D=0 \iff \lambda=-3$ ή $\lambda=3$

▸ $\lambda=-3$: $D=0$, $D_x=D_y=-30\neq 0$, άρα το σύστημα είναι αδύνατο

▸ $\lambda=3$: $D=0$, $D_x=D_y=0$, σύστημα αόριστο.

Δ2: i) $\begin{cases} x=x^2-y^2 & (1)\\ y=-2xy & (2)\end{cases}$

Από (2): $y=-2xy \iff y+2xy=0 \iff y(1+2x)=0$
$\iff y=0$ ή $x=-\frac{1}{2}$

• $y=0$: Η (1): $x=x^2 \iff x(1-x)=0 \iff x=0$ ή $x=1$

• $x=-\frac{1}{2}$: Η (1): $-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-y^2 \iff y^2=\frac{3}{4} \iff y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Λύσεις του (i) $(0,0),(1,0),\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ii) $\begin{cases} x+2y=5 & (1)\\ x^2-2xy-2y^2=1 & (2)\end{cases}$

Από (1): $x+2y=5 \iff x=5-2y$

άρα η (2) γίνεται:

$(5-2y)^2-2(5-2y)y-2y^2=1 \iff$

$25-20y+4y^2-10y+4y^2-2y^2-1=0 \iff$

$6y^2-30y+24=0 \iff y^2-5y+4=0 \iff y=1$ ή $y=4$

• $y=1 \Rightarrow x=5-2y=3$

• $y=4 \Rightarrow x=5-2y=-3$

δύο λύσεις: $(3,1)$, $(-3,4)$.

iii) $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=-2 \\ \frac{4}{x}-\frac{3}{y}=11 \end{cases}$: περιορισμοί: $x,y \neq 0$

θέτουμε $u=\frac{1}{x}$, $v=\frac{1}{y}$ και το σύστημα γίνεται:

$\begin{cases} 2u+v=-2 \\ 4u-3v=11 \end{cases} \overset{\cdot 3}{\underset{\cdot 1}{\iff}} \begin{cases} 6u+3v=-6 \\ 4u-3v=11 \end{cases}$

$(+)$: $10u=5 \iff u=\frac{1}{2}$

για $u=\frac{1}{2}$: $2\cdot\frac{1}{2}+v=-2 \iff 1+v=-2 \iff v=-3$

άρα: $\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$ και $-3=\frac{1}{y} \iff x=2,\ y=-\frac{1}{3}$

Δ3: $\begin{cases} x^2+y^2=10 & (1) \\ xy=-3 & (2) \end{cases}$

Από (2) έχουμε: $x\neq 0,\ y\neq 0$ και $y=-\frac{3}{x}$

άρα η (1): $x^2+\frac{9}{x^2}=10 \overset{\cdot x^2}{\iff} x^4+9=10x^2$

$\iff x^4-10x^2+9=0 \iff (x^2-1)(x^2-9)=0$

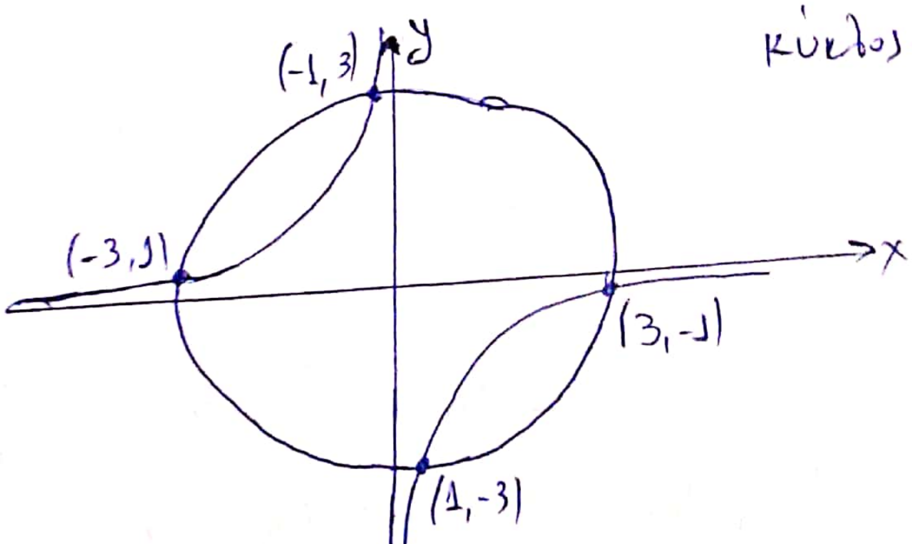
$\iff x^2=1$ ή $x^2=9 \iff x=\pm 1$ ή $x=\pm 3$

άρα: $x=-1 \Rightarrow y=3$, $(-1,3)$

$x=1 \Rightarrow y=-3$, $(1,-3)$

$x=-3 \Rightarrow y=1$ $(-3,1)$

$x=3 \Rightarrow y=-1$ $(3,-1)$



κύκλος - υπερβολή

Δ4: Απαιτούμε η εξίσωση $-x^2 = 2x+k$ ή ισοδύναμα η εξίσωση $-x^2-2x-k=0$ να έχει δύο λύσεις. Θέλουμε $\Delta>0$, δηλαδή:

$4-4k>0 \iff -4k>-4 \iff \boxed{k<1}$

Scanned by CamScanner