

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 9/10/2021

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις δυο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$. (6 μ)

A2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}. \quad (6 \mu)$$

A3. Πότε μια συνάρτηση f καλείται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$; (3 μ)

A4. Πότε μια συνάρτηση f καλείται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (4 μ)

A5. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος

1. Αν $f(x) = \ln x$, $g(x) = e^{-x}$, τότε $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

2. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

3. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων, αν υπάρχουν, βρίσκονται πάνω στην $y = x$.

(6 μ)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$.

B1. Να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη. (7 μ)

B2. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(f(|x|-3)+9) > 1$. (6 μ)

B3. Να βρείτε την παράγωγο της αντίστροφης, όπου αυτή ορίζεται. (7 μ)

B4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (5 μ)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Γ1. Να δείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη (8 μ)

Γ2. Να λυθεί η εξίσωση $3f''(x) - f'(x) = 3f^{(3)}(x) - f(x) - 4e$. (5 μ)

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται ότι $g(x) = f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Γ3. Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης g . (6 μ)

Γ4. Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$. (6 μ)

ΘΕΜΑ Δ

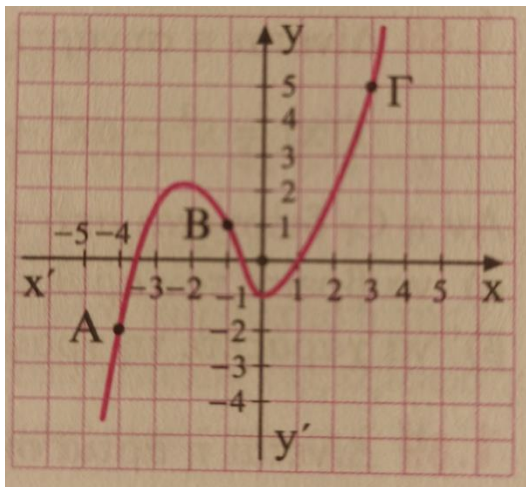
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \eta\mu\beta + 1, & 0 \leq x < 1 \\ x - \eta\mu\beta + 1, & 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$, $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Επίσης ισχύει $f(f(\eta\mu\beta)) = \beta^2 + 2$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\beta = 0$. (8 μ)

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (7 μ)

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x^2}) + f(e^{\sqrt{x}}) = f(e^{x^3}) + f(e^x)$ στο $[0, 1)$. (5 μ)

Δ4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g , της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον x' στα σημεία με τετμημένες 1 , $-\frac{1}{2}$ και $-\frac{7}{2}$.



Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$. (5 μ)