1. ✉ ΟύλωφΠάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

Λύσεις Γεωμετρία ‘Α Λυκείου 18/12/2022

Θέμα 1ο

Α) Να χαρακτηρίσετε με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις

i) Λ

ii) Λ

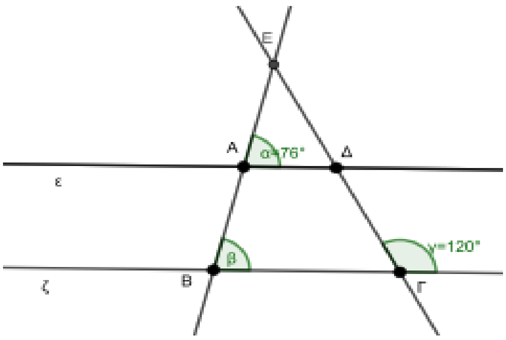
iii) Λ

iv) Λ

v) Σ

Β) Βλ. Σχολ. Σελ. 68

Θέμα 2ο



α) Οι γωνίες $\widehat{\alpha}$ και $\widehat{\beta}$ είναι εκτός εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ε και ζ που τέμνονται από την ευθεία ΑΒ. Οπότε $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} = 76^o$.

β) Η γωνία $\widehat{\Gamma}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{\gamma} = 120^o$, έτσι $\widehat{\Gamma} = 180^o - 120^o = 60^o$.

Οι γωνίες $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\Delta}$ του τετράπλευρου είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ευθειών ε και ζ που τέμνονται από τη ΓΔ. Άρα είναι παραπληρωματικές, οπότε

$\widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 180^o$ ή $\widehat{\Delta} = 180^o - 60^o = 120^o$.

Η γωνία $\widehat{A}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{\alpha} = 76^o$. Έτσι $\widehat{A} + \widehat{\alpha} = 180^o$ ή $\widehat{A} + 76^o = 180^o$ και τελικά $\widehat{A} = 180^o - 76^o = 104^o$.

γ) Στο τρίγωνο ΕΑΔ έχουμε ήδη γνωστή τη γωνία $\widehat{\alpha} = 76^o$. Επιπλέον η γωνία $A\widehat{\Delta}E$ του τριγώνου είναι η παραπληρωματική της γωνίας $\widehat{\Delta}$ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ οπότε $A\widehat{\Delta}E + \widehat{\Delta} = 180^o$, ή $A\widehat{\Delta}E = 180^o - 120^o = 60^o$. Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ είναι 180^o, οπότε $A\widehat{\Delta}E + \widehat{\alpha} + \widehat{E} = 180^o$ ή $60^o + 76^o + \widehat{E} = 180^o$, δηλαδή $136^o + \widehat{E} = 180^o$ ή $\widehat{E} = 180^o - 136^o = 44^o$.

1. ✉ ΟύλωφΠάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030

2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

Θέμα 3ο

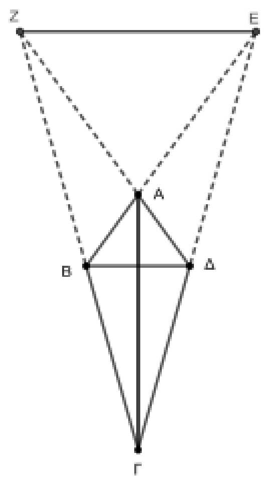
α) Π = 24 cm, άρα α+β+γ=24 και κάνοντας πράξεις, x=4.
Επομένως, α = 10cm, β = 8cm, γ = 6cm.
Για να υπάρχει δηλαδή τέτοιο τρίγωνο με αυτές τις πλευρές, θα πρέπει να ισχύει η τριγωνική ανισότητα για κάθε πλευρά.
Πράγματι, β-γ<α<β+γ και α-γ<β<α+γ και α-β<γ<α+β. Άρα υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.

β) Από Θεώρημα, σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα. Εφόσον γ<β<α, προκύπτει για τις γωνίες ότι Γ<Β<Α.

γ) Παρατηρώ ότι οι πλευρές αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα. Εφαρμόζοντας το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος, προκύπτει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με την ορθή (ως μεγαλύτερη γωνία) να βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά. Από προηγούμενο Θεώρημα (και τα πορίσματά του) και από ερώτημα β, Α = 90° και κατά συνέπεια οι γωνίες Β και Γ είναι μεταξύ τους συμπληρωματικές.

Θέμα 4ο

α)



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν:

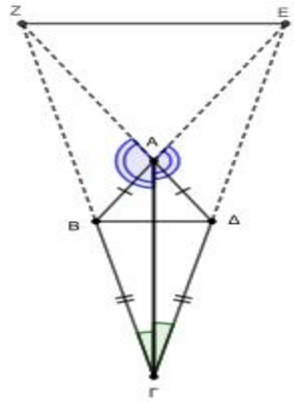
- ΑΒ = ΑΔ, από υπόθεση
- ΓΒ = ΓΔ, από υπόθεση
- ΓΑ κοινή πλευρά

Από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ίσα, οπότε έχουν $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}\Delta$ (1), διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα. Άρα η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Gamma}\Delta$.

1. 🖂 ΟύλωφΠάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030

2. 🖂 Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

β)



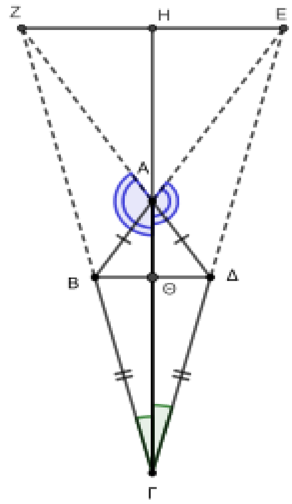
ΖΑ̂Β = ΕΑ̂Δ (2) ως κατακορυφήν γωνίες, ΒΑ̂Γ = ΔΑ̂Γ (3), γιατί είναι γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΓΒ και ΓΔ αντίστοιχα, των ίσων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ του α) ερωτήματος. Από (2) και (3) έχουμε ότι: ΖΑ̂Γ = ΕΑ̂Γ (4) ως αθροίσματα ίσων γωνιών

Τα τρίγωνα ΖΑΓ και ΕΑΓ έχουν:

- ΒΓ̂Α = ΑΓ̂Δ, από τη σχέση (1)
- ΑΓ κοινή πλευρά
- ΖΑ̂Γ = ΕΑ̂Γ, από τη σχέση (4)

Άρα από το κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα ΖΑΓ και ΕΑΓ είναι ίσα οπότε ΓΖ=ΓΕ γιατί είναι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες ΖΑ̂Γ, ΕΑ̂Γ αντίστοιχα.

γ)



Έστω Η και Θ τα σημεία στα οποία το τμήμα ΑΓ τέμνει τα τμήματα ΖΕ και ΒΔ αντίστοιχα. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΒΔ (ΓΒ = ΓΔ), η ΓΘ είναι διχοτόμος, άρα και ύψος. Τότε: ΒΔ ⊥ ΓΘ. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΖΕ (ΓΖ = ΓΕ), η ΓΗ είναι διχοτόμος, άρα και ύψος. Τότε: ΕΖ ⊥ ΓΗ ή ΕΖ ⊥ ΓΘ.

Οπότε συμπεραίνουμε ότι ΕΖ // ΒΔ, ως κάθετα στο ίδιο τμήμα ΓΘ.