ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 18/12/22

ΘΕΜΑ Α

Α1. 1. Σ 2. Λ 3. Σ 4. Λ 5. Σ
6. Σ 7. Σ 8. Σ 9. Σ 10. Σ

Α2. 1. Γ 2. Β 3. Ε 4. Β 5. Β

Α3. Σελ. 41 - Σχολικό βιβλίο

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|\vec{\alpha}|=2 \quad |\vec{\beta}|=2\sqrt{2} \quad , \quad (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{4}$

1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

$=2\cdot2\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$

$=4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cdot\sqrt{2}^2=2\cdot2=4$

2. $\vec{u}\cdot\vec{\alpha}=(\vec{\beta}-2\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-2\vec{\alpha}^2$

$=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-2|\vec{\alpha}|^2$

$=4-2\cdot2^2=4-2\cdot4=4-8=-4$

3. $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{u},\vec{\alpha}})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{\alpha}|}$ (1)

$|\vec{u}|^2=\vec{u}^2=(\vec{\beta}-2\vec{\alpha})^2=\vec{\beta}^2-4\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}+4\vec{\alpha}^2$

$=|\vec{\beta}|^2-4\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}+4|\vec{\alpha}|^2$

$=(2\sqrt{2})^2-4\cdot4+4\cdot2^2$

$=4\cdot2-16+4\cdot4$

$=8-16+16$

$=8$ Άρα $|\vec{u}|=\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot2}=2\sqrt{2}$ (2)

B1. 3 ⇝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Από ① $\overset{②}{\Rightarrow}$ $συν(\widehat{\vec{u},\vec{α}}) = \dfrac{-4}{2\cdot 2\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$συν(\widehat{\vec{u},\vec{α}}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow συν(\widehat{\vec{u},\vec{α}}) = -συν\dfrac{π}{4}$

$\Leftrightarrow συν(\widehat{\vec{u},\vec{α}}) = συν(π-\dfrac{π}{4})$

$\Leftrightarrow συν(\widehat{\vec{u},\vec{α}}) = συν\dfrac{3π}{4}$

Άρα $(\widehat{\vec{u},\vec{α}}) = \dfrac{3π}{4}$

B2. $(2λ^2+λ-3)\cdot x-(λ^2+λ-2)y-5λ^2-3λ+8=0 \quad (1)$

1. Για να παριστάνει η (1) ευθεία πρέπει:

$2λ^2+λ-3\neq 0$ ή $-(λ^2+λ-2)\neq 0$

• Λύνουμε

$2λ^2+λ-3=0$

$Δ=1-4\cdot 2\cdot(-3)$

$=1+24=25>0$

$λ_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2}=\dfrac{-1\pm 5}{4}$

$λ_{1,2}= \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Άρα $λ\neq 1$ και $λ\neq -\dfrac{3}{2}$

$-(λ^2+λ-2)=0 \Leftrightarrow λ^2+λ-2=0$

$Δ=9$

$λ_{1,2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}= \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

Άρα $λ\neq -2$ και $λ\neq 1$

Επομένως η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $λ\in\mathbb{R}-\{1\}$

Β2. 2. Για να παριστάνει η (1) ευθεία παράλληλη στον $x'x$ πρέπει:

$\lambda \neq 1$ και $2\lambda^2+\lambda-3=0 \Leftrightarrow$

$\lambda=1$ ή $\lambda=-\frac{3}{2}$

Άρα $\lambda=-\frac{3}{2}$.

3. Η (1) παριστάνει ευθεία, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ όταν $-5\lambda^2-3\lambda+8=0$ και $\lambda \neq 1$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot(-5)\cdot 8=169>0$

$\lambda_{1,2}=\frac{3\pm 13}{-10}= \begin{cases} -\frac{8}{5} \\ 1 \text{ απορρ.} \end{cases}$

Άρα για $\lambda=-\frac{8}{3}$

4. Για $\lambda=0$ η (1) γίνεται:

$-3x+2y+8=0$ (ε)

- Για $x=0 \rightarrow 2y+8=0 \Leftrightarrow 2y=-8$
$\Leftrightarrow y=-4$

Άρα η (ε) τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $A(0,-4)$

- Για $y=0 \rightarrow -3x+8=0 \Leftrightarrow -3x=-8$
$\Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$

Άρα η (ε) τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $B(\frac{8}{3},0)$

$\vec{OA}=(0,-4)$

$\vec{OB}=(\frac{8}{3},0)$

$(OAB)=\frac{1}{2}|\det(\vec{OA},\vec{OB})|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ \frac{8}{3} & 0 \end{vmatrix}\right|$

$=\frac{1}{2}\left|0-(-4)\cdot\frac{8}{3}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}=$

$=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Απόδειξη : Σχολικό βιβλίο - σελίδα 135

Γ2. 1 - Λ

2 - Σ

3 - Λ

4 - Λ

Γ3.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 8x + 9 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline
-3x^4 + 6x^3 - 3x^2 \qquad\qquad & 3x^2 + 2x + 6 \\
2x^3 + 2x^2 - 8x + 9 & \\
-2x^3 + 4x^2 - 2x \quad & \\
6x^2 - 10x + 9 & \\
-6x^2 + 12x - 6 & \\
2x + 3 &
\end{array}
$$

Ταυτότητα της διαίρεσης

$3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 8x + 9 = (x^2 - 2x + 1)(3x^2 + 2x + 6) + 2x + 3$

Γ4. $P(x) = (\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda) \cdot x^4 - \lambda(9 - \lambda^2) \cdot x^3$
$+ \lambda(\lambda^3 - 27) \cdot x^2 + (\lambda^2 - 3\lambda) \cdot x + \lambda$

• (I) Αν $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \neq 0$

$\Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda^2 - 5\lambda + 6 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$ και $\lambda \neq 3$

Το $P(x)$ είναι 4ου βαθμού.

(II) Αν $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 2$ ή $\lambda = 3$

i) Αν $\lambda = 0 \rightarrow P(x) = 0$ Δεν ορίζεται ο βαθμός του

ii) Αν $\lambda = 2 \rightarrow P(x) = -10x^3 + 38x^2 - 2x + 2$

3ου βαθμού

iii) Αν $\lambda = 3 \rightarrow P(x) = 3$ Μηδενικού βαθμού

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = 3\eta\mu(2x) - 1 \quad , x \in \mathbb{R} \qquad \rho = 3 \;, \omega = 2 \quad , c = -1$

1. $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

2. $-1 \leq \eta\mu(2x) \leq 1 \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow}$

$-3 \leq 3\eta\mu(2x) \leq 3 \overset{-1}{\Leftrightarrow}$

$-4 \leq 3\eta\mu(2x) - 1 \leq 2$ Μέγιστο $+2$

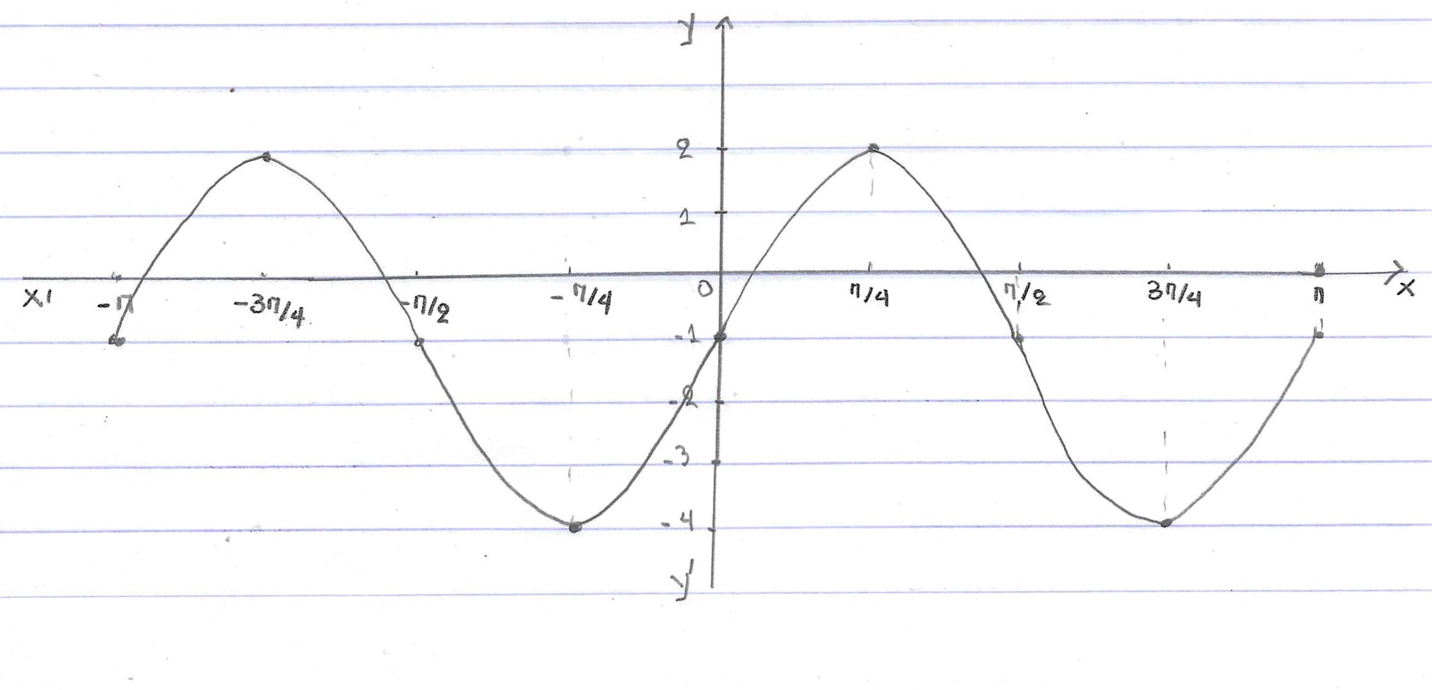
Ελάχιστο -4

ή $\max f = |\rho| + c = 3 - 1 = 2$

$\min f = -|\rho| + c = -3 - 1 = -4$

3.

x	$-\pi$	$-3\pi/4$	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$2x$	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\eta\mu(2x)$	0	$+1$	0	-1	0	1	0	-1	0
$3\eta\mu(2x)$	0	$+3$	0	-3	0	3	0	-3	0
$3\eta\mu(2x)-1$	-1	2	-1	-4	-1	2	-1	-4	-1



Δ_2.

(1) $2\eta\mu^2 x + \eta\mu x - 1 = 0$ Θέτω $\eta\mu x = y$

$2y^2 + y - 1 = 0$ $|y| \le 1$

$\Delta = 9$ $y_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$

$\eta\mu x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$

$x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$

$\kappa \in \mathbb{Z}$

$\eta\mu x = -1$

$\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu(-\frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$

$\kappa \in \mathbb{Z}$

(2) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{4} - x) = 0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{4} - x) = -\eta\mu x$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{4} - x) = \eta\mu(-x)$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{4} - x) = \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + x)$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} + x$ ή $\frac{\pi}{4} - x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} - x$

$\Leftrightarrow -2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x = -\kappa\pi - \frac{\pi}{8}$

$\kappa \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 0x = 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{4}$

Αδύνατη

Δ_2

(3) $\varepsilon\varphi x = 1$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$

$\kappa \in \mathbb{Z}$ $\quad x \in (3\pi, 4\pi)$

$3\pi < \kappa\pi + \frac{\pi}{4} < 4\pi \Leftrightarrow$

$3\pi - \frac{\pi}{4} < \kappa\pi < 4\pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\frac{11\pi}{4} < \kappa\pi < \frac{15\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\frac{11}{4} < \kappa < \frac{15}{4}$

$\kappa \in \mathbb{Z}$, άρα $\kappa = 3$

οπότε $x = 3\pi + \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{13\pi}{4}$

(4). $\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) = 1 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) = \sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 2\kappa\pi$ (1)

Για $\kappa = 0$: $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu x = \eta\mu 0 \Leftrightarrow x = \lambda\pi$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

Για $\kappa \neq 0$ η (1) είναι αδύνατη, διότι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$.

(ή). Επειδή $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow$

$-1 \leq 2\kappa\pi \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2\pi} \leq \kappa \leq \frac{1}{2\pi}$

Άρα $\kappa = 0$ (1) $\Rightarrow \eta\mu x = 0$ ...