ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό, Παράγραφος 3.2

Α2. Σχολικό, Παράγραφος 2.1

Α3. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. α) $\begin{cases} (x+3)^2-(x+y)(x-y)=16-y(5-y) & (1) \\ x^2-(x+y)(x+3)=-1-y(x+1) & (2) \end{cases}$

Η (1): $x^2+6x+9+y^2-x^2=16-5y+y^2 \Leftrightarrow$

$\boxed{6x+5y=7}$

Η (2): $x^2-x^2-3x-xy-3y=-1-xy-y \Leftrightarrow$

$\boxed{3x+2y=1}$

Λύνουμε ισοδύναμα: $\begin{cases} 6x+5y=7 \\ 3x+2y=1 \end{cases} \xLeftrightarrow[\cdot(-2)]{\cdot 1}$

$\left.\begin{cases} 6x+5y=7 \\ -6x-4y=-2 \end{cases}\right\} \xrightarrow[\text{κατά μέλη}]{(+)} y=5$, άρα: $x=-3$

Τελικά: $(x,y)=(-3,5)$.

Scanned with CamScanner

β) $\begin{cases} y+x=-1 & (1) \\ xy=-6 & (2) \end{cases}$

Από (2): $xy=-6 \xRightarrow{\boxed{x\neq 0}} y=-\frac{6}{x}$, οπότε

η (1) δίνει: $-\frac{6}{x}+x=-1 \overset{\cdot x}{\Longleftrightarrow} -6+x^2=-x$

$\Longleftrightarrow x^2+x-6=0 \Longleftrightarrow x=2$ ή $x=-3$

- Για $x=2$: $y=-\frac{6}{2}=-3$
- Για $x=-3$: $y=-\frac{6}{-3}=2$

ΑΡΑ: $(x,y)=(2,-3)$ ή $(-3,2)$.

B2. • $\eta\mu\left(\frac{41\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\left(\frac{40\pi+\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\left(20\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=$

$=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\theta.$

• $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{35\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(18\pi+\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\eta\mu\theta$

• $\epsilon\varphi(21\pi-\theta)=\epsilon\varphi(20\pi+(\pi-\theta))=\epsilon\varphi(\pi-\theta)=-\epsilon\varphi\theta$

• $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{25\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(12\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\eta\mu\theta$

• $\sigma\varphi\left(\theta-\frac{5\pi}{2}\right)=\sigma\varphi\left[-\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)\right]=-\sigma\varphi\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)=$

$=-\sigma\varphi\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=-\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\epsilon\varphi\theta.$

• $\sigma\upsilon\nu(-33\pi-\theta)=\sigma\upsilon\nu(-32\pi-(\pi+\theta))=\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$

Άρα η παράσταση Α γίνεται:

$$A=\frac{συνθ\cdot ημθ\cdot(-εφθ)}{(-ημθ)\cdot(-εφθ)\cdot(-συνθ)} = 1.$$

B3. $ημ\frac{13π}{6} = ημ\left(\frac{12π+π}{6}\right) = ημ\left(2π+\frac{π}{6}\right) = ημ\frac{π}{6} = \frac{1}{2}$

$ημ\frac{3π}{2} = -1$

$\cdot\ εφ\frac{73π}{6} = εφ\left(\frac{72π+π}{6}\right) = εφ\left(12π+\frac{π}{6}\right) = εφ\frac{π}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cdot\ ημ\frac{49π}{3} = ημ\left(\frac{48π+π}{3}\right) = ημ\left(16π+\frac{π}{3}\right) = ημ\frac{π}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

οπότε πρέπει να λυθεί η ανίσωση:

$\frac{1}{2}x^2 - 1 \le \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x \iff \frac{1}{2}x^2 - 1 \le -\frac{\sqrt{3}}{6}x$

$\overset{\cdot 6}{\iff} 3x^2 - 6 \le -\sqrt{3}x \iff 3x^2 + \sqrt{3}x - 6 \le 0,$

$Δ = \sqrt{3}^2 - 4\cdot 3\cdot(-6) = 3 + 72 = 75 = (5\sqrt{3})^2$

ρίζες: $x_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3}}{6}$ $\begin{cases} (+) & 2\sqrt{3}/3 \\ (-) & -\sqrt{3} \end{cases}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$3x^2+\sqrt{3}x-6$	+	0	−	0	+

ΑΡΑ: $x \in \left[-\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1α) $A=\left(1-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\eta\mu^2\theta}\right)=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta-1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}\cdot\frac{\eta\mu^2\theta-1}{\eta\mu^2\theta}$

$=\frac{-\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}\cdot\frac{-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta}=1.$

$B=\sigma\upsilon\nu^2\theta\left[(1+\epsilon\varphi\theta)^2+(1-\epsilon\varphi\theta)^2\right]=$

$=\sigma\upsilon\nu^2\theta(1+2\epsilon\varphi\theta+\epsilon\varphi^2\theta+1-2\epsilon\varphi\theta+\epsilon\varphi^2\theta)=$

$=2\sigma\upsilon\nu^2\theta(1+\epsilon\varphi^2\theta)=2\sigma\upsilon\nu^2\theta\left(1+\frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}\right)=$

$=2\sigma\upsilon\nu^2\theta\cdot\left(\frac{\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}\right)=2\sigma\upsilon\nu^2\theta\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}=2$

Γ1β) Είναι $\sigma\varphi\omega=2$, άρα $\epsilon\varphi\omega=\frac{1}{2}$, δλδ:

$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{\sigma\upsilon\nu\omega=2\eta\mu\omega}\ (*)$

Όμως $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\overset{(*)}{\Rightarrow}\eta\mu^2\omega+4\eta\mu^2\omega=1$

$\Rightarrow\eta\mu^2\omega=\frac{1}{5}\xrightarrow[\eta\mu\omega<0]{\pi<\omega<\frac{3\pi}{2}}\eta\mu\omega=-\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{\sqrt5}{5}$

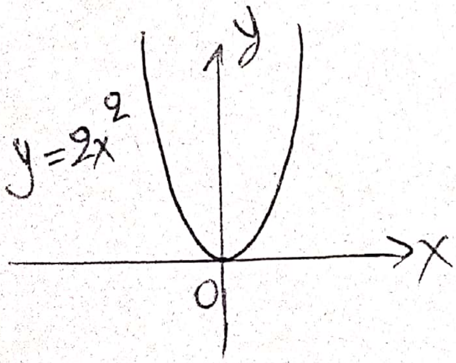
άρα: $\sigma\upsilon\nu\omega\overset{(*)}{=}-\frac{2}{\sqrt5}=-\frac{2\sqrt5}{5}.$

Γ2. $f(x) = 2x^2 + 4x - 6, \quad A_f = \mathbb{R}$.

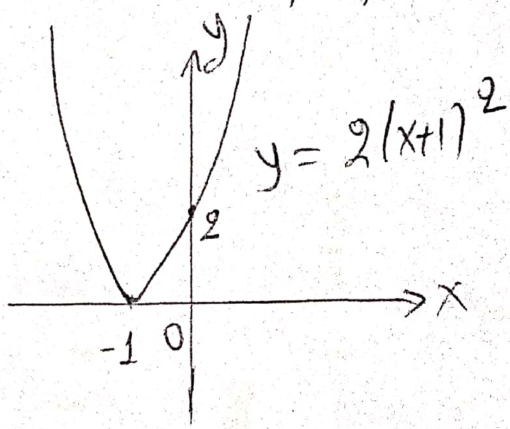
α) Είναι:
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x^2 + 2x + 1) - 2 - 6 \\ &= 2(x+1)^2 - 8, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

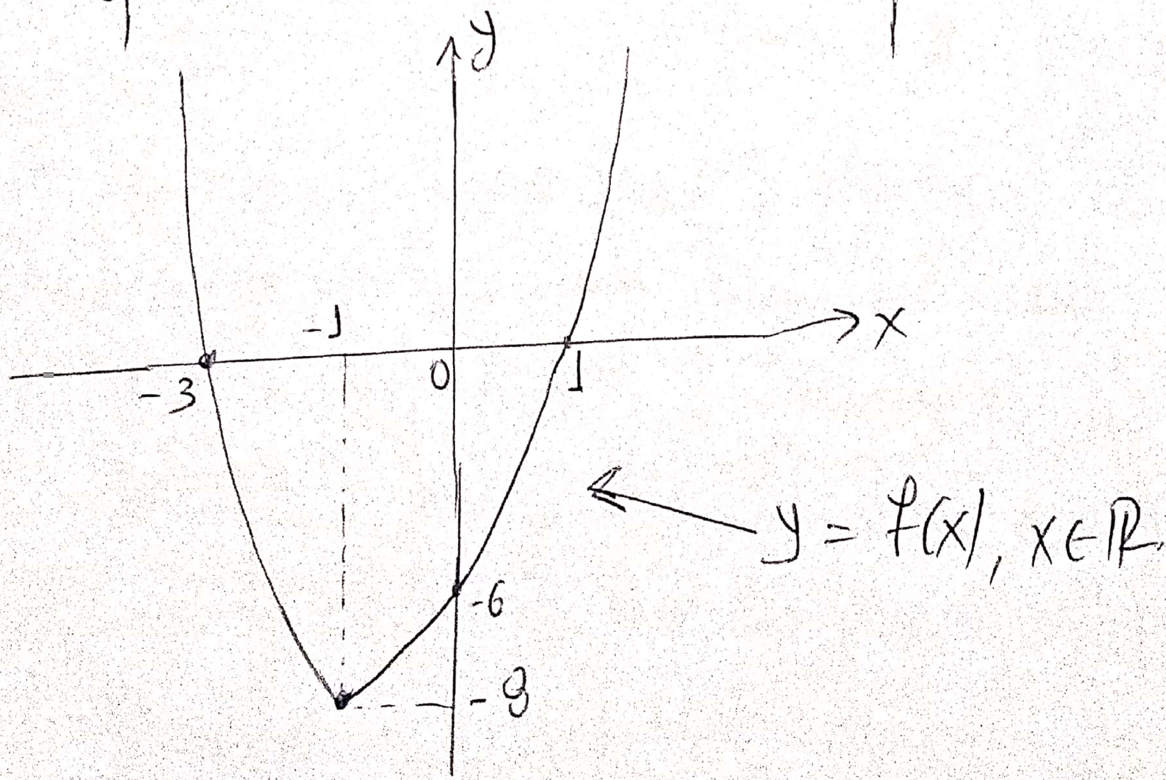
β) Από α) $f(x) = g(x+1) - 8, \quad x \in \mathbb{R}$

(1 μονάδα αριστερά κ' 8 μονάδες κάτω)



$\xrightarrow[\text{αριστερά}]{\text{1 μονάδα}}$





Γ3. $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu(2x) + a, \quad A_f = \mathbb{R}$.

α) $A\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{13}{2}\right) \in C_f \Leftrightarrow f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{13}{2} \Leftrightarrow$

$3\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right) + a = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{a}{2} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \boxed{a = 5}$

Ώστε, $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu(2x) + 5, \quad x \in \mathbb{R}$.

β) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad και έχουμε:

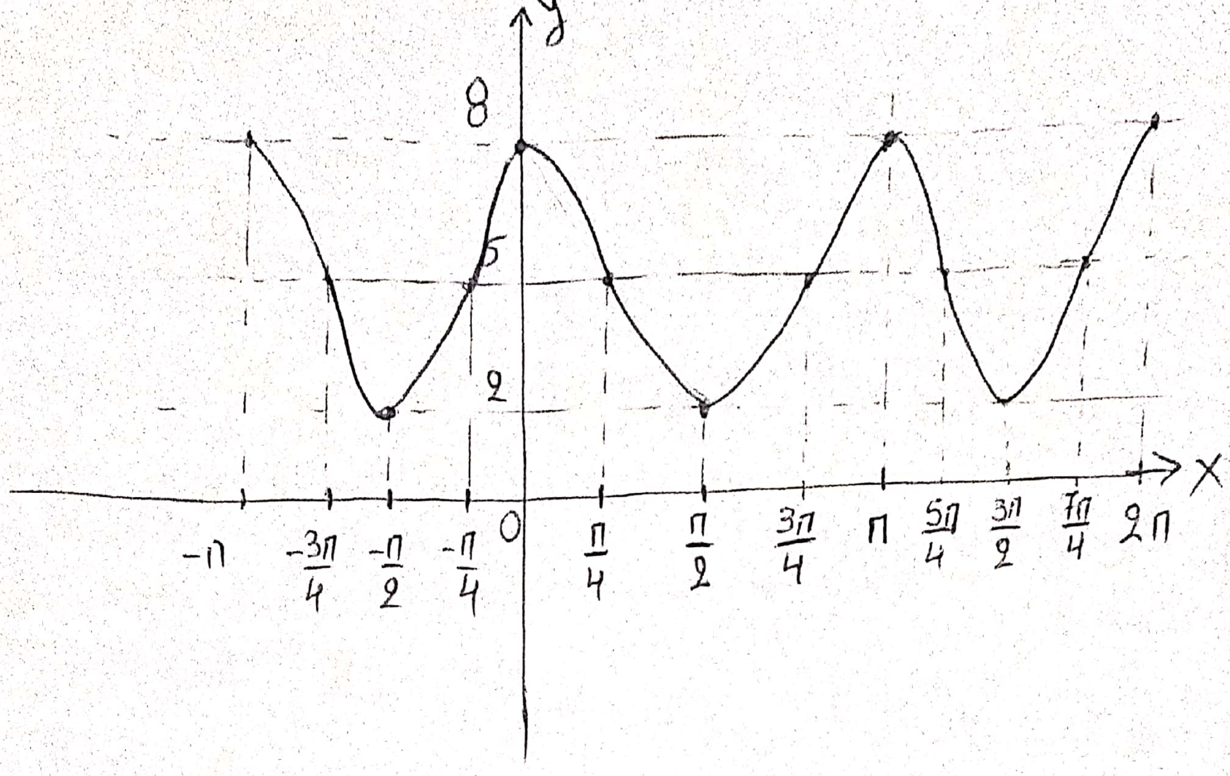
$-1 \leq \sigma\upsilon\nu(2x) \leq 1 \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} -3 \leq 3\sigma\upsilon\nu(2x) \leq 3$

$\Leftrightarrow 5-3 \leq 3\sigma\upsilon\nu(2x) + 5 \leq 5+3 \Leftrightarrow 2 \leq f(x) \leq 8$

$\min f = 2, \quad \max f = 8$.

γ) Το διάστημα $[-\pi, 2\pi]$ είναι 3 περίοδοι της f. Αρκεί να δούμε πως συμπεριφέρεται στο $[0, \pi]$. Βρίσκουμε 5 χαρακτηριστικά σημεία:

- $f(0) = 3\sigma\upsilon\nu 0 + 5 = 3 + 5 = 8, \quad B(0, 8)$
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + 5 = 5, \quad \Gamma\left(\frac{\pi}{4}, 5\right)$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sigma\upsilon\nu\pi + 5 = -3 + 5 = 2, \quad \Delta\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$
- $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} + 5 = 5, \quad E\left(\frac{3\pi}{4}, 5\right)$
- $f(\pi) = 3\sigma\upsilon\nu 2\pi + 5 = 8, \quad Z(\pi, 8)$.



δ) Η f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$ διότι:

$f(-x) = 3\sigma\upsilon\nu(-2x) + 5 = 3\sigma\upsilon\nu(2x) + 5 = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Στο $[0, 2\pi]$: $f \nearrow$ στα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$,

$f \searrow$ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 2 στα σημεία $x_1 = \frac{\pi}{2}$ και $x_2 = \frac{3\pi}{2}$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 8 στα σημεία $x_3 = 0$ και $x_4 = \pi$, $x_5 = 2\pi$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $(3-\mu)x+(4-\mu)y+\mu=0 \quad (1)$

Η (1) είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$

όπου $A=3-\mu$, $B=4-\mu$, $\Gamma=\mu$.

α) $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3-\mu=0 \\ 4-\mu=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu=3 \\ \mu=4 \end{cases}$, άτοπο

άρα $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

β) Η (1) είναι παράλληλη στον $x'x$ αν και μόνο αν: $A=0 \iff 3-\mu=0 \iff \boxed{\mu=3}$.

γ) Απαιτούμε $B\neq 0$ και $-\dfrac{A}{B}=\lambda_{(\zeta)}$, άρα:

$4-\mu\neq 0$ και: $\dfrac{\mu-3}{4-\mu}=-2 \iff \mu\neq 4$ κ' $\mu-3=2\mu-8$

$\iff \mu\neq 4$ και $\mu=5$. Άρα $\boxed{\mu=5}$

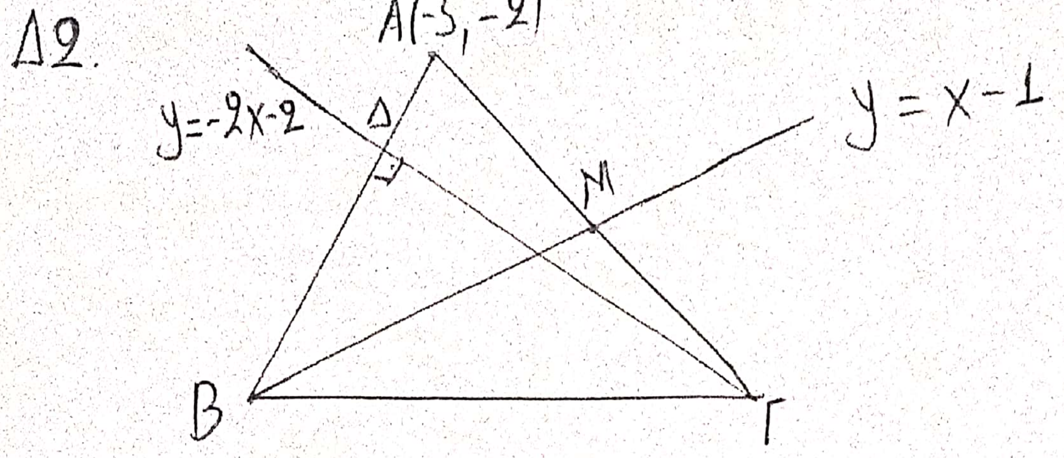
δ) $d(A,(1))=1 \iff \dfrac{|(3-\mu)\cdot 1+(4-\mu)\cdot 1+\mu|}{\sqrt{(3-\mu)^2+(4-\mu)^2}}=1 \iff$

$|7-\mu|=\sqrt{(3-\mu)^2+(4-\mu)^2} \overset{\boxed{\mu\neq 7}}{\iff} (7-\mu)^2=(3-\mu)^2+(4-\mu)^2$

$\iff 49-\cancel{14\mu}+\cancel{\mu^2}=9-\cancel{6\mu}+\cancel{\mu^2}+16-\cancel{8\mu}+\mu^2 \iff$

$\mu^2=24 \iff \mu=\pm 2\sqrt{6}$.

Δ2.



α) $(AB) \perp Γ Δ \Rightarrow λ_{AB} \cdot λ_{ΓΔ} = -1 \Rightarrow -2λ_{AB} = -1$

$\Rightarrow \boxed{λ_{AB} = \frac{1}{2}}$

Εξίσωση (AB): $y-(-2) = λ_{AB}(x-(-5)) \Leftrightarrow$

$y+2 = \frac{1}{2}(x+5) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

β) B: σημείο τομής των AB και BM, άρα

λύνουμε: $\begin{cases} y = x-1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix}$, $\boxed{B(3,2)}$

M: μέσο της ΑΓ: $\rightarrow x_M = \frac{x_A + x_Γ}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_Γ}{2}$

$\underline{M \in (MB): y_M = x_M - 1}$

$\Rightarrow 2x_M = x_Γ - 5$, $2y_M = y_Γ - 2$

$\begin{cases} 2x_M = x_Γ - 5 \\ 2x_M - 2 = y_Γ - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_M = x_Γ - 5 \\ 2x_M = y_Γ \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_Γ = x_Γ - 5}$ (1)

$Γ \in (ΓΔ): y = -2x - 2 \rightarrow y_Γ = -2x_Γ - 2$

$\xRightarrow{①} x_Γ - 5 = -2x_Γ - 2 \rightarrow x_Γ = 1$, άρα $y_Γ = -4$.

οπότε $\boxed{Γ(1,-4)}$

γ) $\vec{AB} = (3-(-5), 2-(-2)) = (8,4)$

$\vec{AΓ} = (1-(-5), -4-(-2)) = (6,-2)$

$$E_{A\hat{B}Γ} = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB},\vec{AΓ})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-16-24\right| = \frac{1}{2}\cdot 40 = 20 \text{ τ.μ.}$$

10