ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 3/1/2022

## ΘΕΜΑ Α

**A4** α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

## ΘΕΜΑ Β

**B1** ▸ $A_{f\circ f} = \{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_f\} = \{x>0 \,/\, \ln(e^x-1)>0\} = (\ln 2, +\infty)$

• $\ln(e^x-1)>0 \Leftrightarrow \ln(e^x-1)>\ln 1 \Leftrightarrow e^x-1>1 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow x>\ln 2$

▸ $f(f(x)) = \ln\left(e^{\ln(e^x-1)}-1\right) = \ln(e^x-2)$, $x>\ln 2$.

**B2**

▸ $f$ παρ/μη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση παρ/μων με:

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x-1} > 0 \quad \forall x>0$$ οπότε $f \uparrow$ στο $(0,+\infty)$ άρα κ' "1-1"

▸ $f$ συνεχής κ' $\uparrow$ στο $(0,+\infty) \rightarrow f(A) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

▸ Για $y\in\mathbb{R}$ και $x>0$ θέτουμε $f(x)=y$

$f(x)=y \Leftrightarrow \ln(e^x-1)=y \Leftrightarrow e^x-1=e^y \Leftrightarrow e^x=e^y+1 \Leftrightarrow x=\ln(e^y+1)$

άρα $f^{-1}(x) = \ln(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$

**B3** • $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ άρα $\boxed{x=0}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$

• $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x-1)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(e^x-1) - \ln e^x\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{e^x-1}{e^x} = 0$$

άρα $\boxed{y=x}$ πλάγια ασυμ. της $C_f$ στο $+\infty$

B4 $f^{-1}(x) + f(f^{-1}(x)) = 2 - x^2 \Leftrightarrow f^{-1}(x) + x + x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \ln(e^x+1) + x^2 + x - 2 = 0$

θεωρούμε $g(x) = \ln(e^x+1) + x^2 + x - 2, \quad x \in [0, 1]$

- $g$ συνεχής στο $[0,1]$ ως ΣΥΝΘΕΣΗ κ' ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΕΧΩΝ
- $g(0) = \ln 2 - 2 = \ln 2 - \ln e^2 = \ln \frac{2}{e^2} < 0$ αφού $\frac{2}{e^2} < 1 \Leftrightarrow 2 < e^2$

$g(1) = \ln(e+1) + 1 + 1 - 2 = \ln(e+1) > 0$ αφού $e+1 > 1$

οπότε $g(0)\, g(1) < 0$ από θ. Bolzano η εξίσωση

$g(x) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) + f(f^{-1}(x)) + x^2 = 2$ έχει ΜΙΑ

ΤΟΥΛ. ΡΙΖΑ ΣΤΟ $(0,1)$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + x, & x < 1 \\ 2x^2 + \beta, & x \geq 1 \end{cases}$$

Γ1 $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \alpha + 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 + \beta$

$\alpha + 1 = \beta + 2 \Leftrightarrow \boxed{\beta = \alpha - 1}$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \to 1^-} (3\alpha x^2 + 1) = 3\alpha + 1$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \to 1^+} (4x) = 4$

$3\alpha + 1 = 4 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$

οπότε $\boxed{\beta = 0}$

Γ2 $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x < 1 \\ 4x, & x \geq 1 \end{cases}$ άρα $f$ συνεχής κ' $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

Γ3 $f(2\sigma\upsilon\nu x - 1) < 0 \Leftrightarrow f(2\sigma\upsilon\nu x - 1) < f(0) \overset{f \uparrow}{\Longleftrightarrow} 2\sigma\upsilon\nu x - 1 < 0$

• $2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Επειδη $x \in [0, \pi]$ τοτε $0 \le 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \le \pi$ ΚΑΙ $0 \le 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \le \pi$

⋮ ⋮

$\boxed{\kappa = 0}$ $\kappa \notin \mathbb{Z}$

Αρα $\boxed{\kappa=0} \to x = \frac{\pi}{3}$. Απο συνεπεια Θ. Bolzano εχουμε:

| $x$ | $0$ | $\pi/3$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | $0$ | | $\pi$ |
| $2\sigma\upsilon\nu x_0 - 1$ | $1$ | $0$ | $-3$ |
| $2\sigma\upsilon\nu x - 1$ | $+$ | $0$ | $-$ |

οποτε, $2\sigma\upsilon\nu x - 1 < 0$ οταν $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

$\boxed{\Gamma 4}$ (α) Για $x \ge 1$: $f(x) = 2x^2$, $f'(x) = 4x$

εστω, $(x_0, f(x_0))$ το σημειο επαφης

• $(\varepsilon)$: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 2x_0^2 = 4x_0(x - x_0)$

• $A(0,-2) \in (\varepsilon) \Rightarrow -2 - 2x_0^2 = 4x_0(-x_0) \Leftrightarrow -2 - 2x_0^2 = -4x_0^2$

$\Leftrightarrow 2x_0^2 = 2 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \underset{x_0 \ge 1}{\Leftrightarrow} \boxed{x_0 = 1}$

Αρα $(\varepsilon)$: $y - 2 = 4(x - 1) \Leftrightarrow \boxed{y = 4x - 2}$

(β) • $y = f(x)$

• $y(t) = f(x(t))$

• $y'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t)$

$t = t_0$: $y'(t_0) = f'(x(t_0)) \cdot x'(t_0) \underset{y'(t_0) = 8x'(t_0)}{\Longleftrightarrow} 8x'(t_0) = f'(x(t_0)) \cdot x'(t_0) \underset{x'(t_0) > 0}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 8 = f'(x(t_0)) \Leftrightarrow 8 = 4x(t_0) \Leftrightarrow x(t_0) = 2$

οποτε $M_0(x(t_0), y(t_0)) = (2, 8)$

ΘΕΜΑ Δ

$\boxed{\Delta 1}$ α) Έστω ότι $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f'(x_0)=0$

Για $x=x_0$: $f(f'(x_0))=4 \Leftrightarrow f(0)=4$ ΑΤΟΠΟ άρα $f'(x)\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

β) Έστω, ότι η $f$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ 1-1 ΤΟΤΕ $x_1<x_2$ με $f(x_1)=f(x_2)$

Θ.Rolle $\rightarrow \exists x_3 \in \mathbb{R}: f'(x_3)=0$ ΑΤΟΠΟ άρα $f$ ΕΙΝΑΙ 1-1

$\boxed{\Delta 2}$ $f^{-1}\left((x-1)\cdot f'(\alpha)-(2-x)f'(\beta)+4\right)=f'(\alpha)$

$\Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left((x-1)f'(\alpha)-(2-x)f'(\beta)+4\right)\right)=f(f'(\alpha))$

$\Leftrightarrow (x-1)f'(\alpha)-(2-x)f'(\beta)+\cancel{4}=\cancel{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)f'(\alpha)+(x-2)f'(\beta)=0$

• $\begin{cases} f' \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ f'(x)\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$ άρα η $f'$ ΔΙΑΤΗΡΕΙ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΣΤΟ $\mathbb{R}$

Θεωρούμε $K(x)=(x-1)f'(\alpha)+(x-2)f'(\beta)$, $x\in[1,2]$

$K$ συνεχής στο $[1,2]$ ως πολ/κή

$K(1)=-f'(\beta)$

$K(2)=f'(\alpha)$

$K(1)K(2)=-\underbrace{f'(\alpha)f'(\beta)}_{>0}<0$ Θ. Bolzano...

$\boxed{\Delta 3}$ α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-f(-2)x\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-f(-2)\right)\right]=0 \Leftrightarrow +\infty\left(1-f(-2)\right)=0$

• Αν $f(-2)\neq 1$ ΤΟΤΕ ΤΟ ΟΡΙΟ ΕΙΝΑΙ $\pm\infty \rightarrow$ Άτοπο

άρα $f(-2)=1$

$\boxed{Δ3}$ β) Είναι, $f(-\lambda)=1 \Leftrightarrow -2\lambda+\lambda^2+2^\lambda=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^\lambda+\lambda^2-2\lambda-1=0$

Θεωρούμε $\Lambda(x)=2^x+x^2-2x-1$, $x\in\mathbb{R}$

- $\Lambda(0)=0=\Lambda(1)$ ΠΡΟΦΑΝΕΙΣ ΡΙΖΕΣ
- Έστω $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ με $\Lambda(\rho_1)=\Lambda(\rho_2)=\Lambda(\rho_3)=0$

ΘR ΘR

$\Lambda'(\xi_1)=0=\Lambda'(\xi_2)$

- $\Lambda'(x)=2^x\ln 2+2x-2$

$\Lambda''(x)=2^x\ln^2 2+2$

ΘR

$\Lambda''(\xi_3)=0$

$\Leftrightarrow 2^{\xi_3}\ln^2\xi_3+2=0$ Άτοπο

άρα η εξίσωση $\Lambda(x)=0$ έχει ακριβώς 2 λύσεις $x_1=0$ ή $x_2=1$

- Για $\boxed{\lambda=0}$: $f(x)=1$, $f'(x)=0$

Έχουμε, $f(f'(x))=4 \Leftrightarrow f(0)=4$ Άτοπο άρα

$\lambda\neq 0$

- Για $\boxed{\lambda=1}$: $f(x)=x+3$, $f'(x)=1$

Ικανοποιεί την σχέση $f(f'(x))=4 \Leftrightarrow f(1)=4$

Τελικά, $f(x)=x+3$, $x\in\mathbb{R}$

$\boxed{\Delta 4}$ • $g'(x) = \dfrac{2x+5}{(x+3)(x+2)} \Leftrightarrow g'(x) = \dfrac{2x+5}{x^2+5x+6}$

$\Leftrightarrow g'(x) = \dfrac{(x^2+5x+6)'}{x^2+5x+6} \Leftrightarrow g'(x)\cdot(x^2+5x+6) = (x^2+5x+6)'$

$\Leftrightarrow (x^2+5x+6)' - g'(x)(x^2+5x+6) = 0$

$\overset{e^{-g(x)}}{\Leftrightarrow} \left(e^{-g(x)}\cdot(x^2+5x+6)\right)' = 0$

Θεωρούμε $h(x) = e^{-g(x)}\cdot(x^2+5x+6)$ συνεχής στο $[-3,-2]$

$h$ παρ/μη στο $(-3,-2)$

$\left.\begin{array}{l} h(-3) = e^{-g(-3)}\cdot 0 = 0 \\ h(-2) = e^{-g(-2)}\cdot 0 = 0 \end{array}\right\} h(-3) = h(-2) = 0$ Θ. Rolle ...

---

β' τρόπος για το $\boxed{\Delta 3}$ (β)

Είναι $f(x) = \lambda x + \lambda^2 + 2^\lambda$ άρα $f'(x) = \lambda$

• $f(f'(x)) = 4 \Leftrightarrow f(\lambda) = 4$

$\begin{cases} f(\lambda) = 4 \\ f(-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + \lambda^2 + 2^\lambda = 4 \\ (-)\ -2\lambda + \cancel{\lambda^2} + 2^\lambda = 1 \end{cases}$

$\lambda^2 + 2\lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \quad \Delta = 4 + 12 = 16$

$\lambda = \begin{cases} 1 & \text{δεκτή} \\ -3 \rightarrow & \text{απορ.} \end{cases}$