Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Σχολ. Βιβλίο

Α2. (iv). διότι α: $\sqrt{5}^2 - 3^2 = -4 < 0$ ⇒ $\Delta = \beta^2 - 4\underbrace{\alpha\gamma}_{<0} > 0$ Άρα 2 άνισες πραγματ. ρίζες

Α3. (α) Λ (β) Σ (γ) Σ (δ) Σ (ε) Σ

Θέμα Β

(i) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ $\quad \Delta = 25 + 24 = 49 \quad x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 7}{6} \begin{cases} -2 \\ 1/3 \end{cases}$

(ii) $\dfrac{10x^2 + 5x}{x^2 + x - 6} = \dfrac{27}{x+3} + \dfrac{13}{x-2} \Leftrightarrow$

$\dfrac{10x^2 + 5x}{(x+3)(x-2)} = \dfrac{27}{x+3} + \dfrac{13}{x-2}$ $\quad$ ΕΚΠ: $(x+3)(x-2) \neq 0 \begin{cases} x \neq -3 \\ \text{και} \\ x \neq 2 \end{cases}$

$10x^2 + 5x = 27(x-2) + 13(x+3) \Leftrightarrow$

$10x^2 + 5x = 27x - 54 + 13x + 39 \Leftrightarrow$

$10x^2 - 35x + 15 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0.$ $\quad \Delta = 49 - 24 = 25$

$x_{1,2} = \dfrac{7 \pm 5}{4} \begin{cases} 3 \text{ Δεκτές} \\ 1/2 \end{cases}$

(iii) $(x+3)^5 - 16x - 48 = 0 \Leftrightarrow$

$(x+3)^5 - 16(x+3) = 0 \Leftrightarrow (x+3)\left[(x+3)^4 - 16\right] = 0$

$(x+3) = 0$ ή $(x+3)^4 = 16$

$\boxed{x = -3}$ $\quad x + 3 = \pm\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x + 3 = \pm 2 \begin{cases} x = -1 \\ \text{ή} \\ x = -5. \end{cases}$

(iv) $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0.$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} 3\omega^2 + 8\omega - 3 = 0 \\ \Delta = 64 + 36 = 100 \quad \omega_{1,2} = \dfrac{-8 \pm 10}{6} \begin{cases} 1/3 \\ -3. \text{ Απορ.} \end{cases} \end{array} \right.$

Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$

$x^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

B2.

(i) $-x^2+8x-16>0$

$\Delta = 64-64=0$ $\quad x_0=\frac{-8}{-2}=4.$

x		4	
$f(x)$	$-$	0	$-$

Αδύνατη

(ii) $5x^2-20x\le 0$

$5x(x-4)\le 0$

x		0		4	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x\in[0,4]$

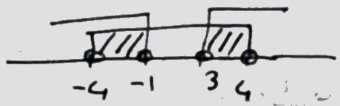
(iii) $2x-1<x^2-4<12$

$x^2-2x-3>0$ και $x^2-16<0$

x		-1		3	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

x		-4		4	
x^2-16	$+$	0	$-$	0	$+$

Συναλήθευση



$x\in(-4,-1)\cup(3,4)$.

Θέμα Γ.

Γ1. $\Delta=16-12=4$ $\quad x_{1,2}=\frac{-4\pm 2}{-2} < {3 \atop 1}$

x		1		3	
$-x^2+4x-3$	$-$	0	$+$	0	$-$

Γ2. $\frac{-x^2+4x-3}{9-x^2}=\frac{-(x-1)(x-3)}{-(x^2-9)}=\frac{-(x-1)(x-3)}{-(x-3)(x+3)}=\frac{x-1}{x+3}$

Γ3. $B=f(+0,998)$ το $0,998<1$ άρα $f(0,998)<0$.

Γ4. $-|x-2|^2+4|x-2|-3\geq 0$

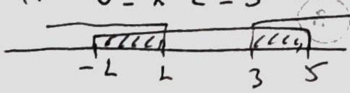
θέτουμε $|x-2|=\omega\geq 0$

$-\omega^2+4\omega-3\geq 0$ Από το Γ1 $\omega\in[1,3]$

Άρα $\underbrace{1\le|x-2|\le 3}$

$|x-2|\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 3$ ή $x\le 1$

και $|x-2|\le 3 \Leftrightarrow -3\le x-2\le 3 \Leftrightarrow -1\le x\le 5.$



$x\in[-1,1]\cup[3,5]$

Γ5. $(-\alpha^2+4\alpha-3)\cdot(-\beta^2+4\beta-3)<0$

Αν θεωρήσουμε $f(x)=-x^2+4x-3$ με πρόσημο

x		1		3	
$f(x)$	$-$		$+$		$-$

τότε έχουμε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

άρα για να είναι τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ ετερόσημα.

έχουμε 2 περιπτώσεις.

- Είτε $\alpha<1$ και $1<\beta<3$.

άρα $\alpha-1<0$ και $\beta-3<0$. Συνεπώς $(\alpha-1)(\beta-3)>0$

άρα ισχύει το ζητούμενο

- Είτε $1<\alpha<3$ και $\beta>3$.

Άρα, $\alpha-1>0$ και $\beta-3>0$ Συνεπώς $(\alpha-1)(\beta-3)>0$

άρα ισχύει πάλι το ζητούμενο

Θέμα Δ

Δ1. $4x^2+4(3\mu+2)x+9\mu^2-16=0$.

(i) Πρέπει $\Delta\geq0 \Leftrightarrow [4(3\mu+2)]^2-4\cdot4\cdot(9\mu^2-16)\geq0$

$16(3\mu+2)^2-16(9\mu^2-16)\geq0$

$16(\cancel{9\mu^2}+12\mu+4-\cancel{9\mu^2}+16)\geq0$

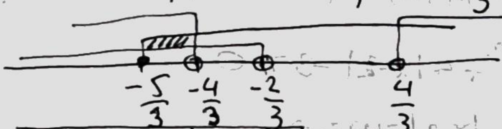
$16(12\mu+20)\geq0 \Leftrightarrow \mu\geq-\frac{20}{12} \Leftrightarrow \boxed{\mu\geq-\frac{5}{3}}$

(ii) Πρέπει $\Delta\geq0$ και $P>0$ και $S>0$

$\mu\geq-\frac{5}{3}$ και $\frac{9\mu^2-16}{4}>0 \Leftrightarrow \frac{(3\mu-4)(3\mu+4)}{4}>0$

μ		$-\frac{4}{3}$		$\frac{4}{3}$	
$9\mu^2-16$	$+$	0	$-$	0	$+$

$S>0 \Leftrightarrow -4(3\mu+2)>0 \Leftrightarrow 3\mu+2<0 \Leftrightarrow \mu<-2/3$



Συνεπώς $\mu\in[-\frac{5}{3},-\frac{4}{3})$

(iii) $\Delta=0 \Leftrightarrow \mu=-5/3$ με $x_0=\frac{-4(3(-\frac{5}{3})+2)}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

(iv). $\Delta\geq0$ και $S=0$

$\mu\geq-\frac{5}{3}$ $\quad$ $\mu=-2/3$

(v). $P<0$ (εξασφαλίζει και το $\Delta>0$)

$\frac{9\mu^2-16}{4}<0 \Leftrightarrow \mu\in(-\frac{4}{3},\frac{4}{3})$.

Δ2: Πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2+2\lambda+1-4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1 \geq 0$

$(\lambda-1)^2 \geq 0.$
Ισχύει.

Έστω x_1 και x_2 οι δύο ρίζες

$x_2 = 2x_1$ οπότε.

$S = x_1 + x_2 = \lambda+1 \Leftrightarrow 3x_1 = \lambda + 1.$

$P = x_1 \cdot x_2 = \lambda \Leftrightarrow 2x_1^2 = \lambda.$

$\Big\}\ 3x_1 = 2x_1^2 + 1 \Leftrightarrow$

$2x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = 9 - 8 = 1.$

$x_1 = \frac{3 \pm 1}{4} < \begin{matrix} 1 \\ 1/2 \end{matrix}$

όταν $x_1 = 1 \quad x_2 = 2$

$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 1.$

Άρα $\lambda = 2$ ή $\lambda = \frac{1}{2}$

Δ3: Για να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει:

$(\lambda+1) > 0$ και $\Delta < 0$

$\boxed{\lambda > -1}$

$4^2 - 4(\lambda+1)(\lambda-2) < 0$

$4 \cdot (4 - \lambda^2 - \lambda + 2\lambda + 2) < 0$

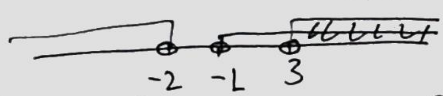
$4(-\lambda^2 + \lambda + 6) < 0$

$\Delta' = 25 \quad \frac{-1 \pm 5}{-2} < \begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix}$

λ		-2		3	
Δ	$-$	0	$+$	0	$-$

$\lambda \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

Τελικά



Για $\lambda > 3$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$