ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
26/3/2022

ΘΕΜΑ Α

$\boxed{A3}$ ΑΛΗΘΕΙΣ ΕΙΝΑΙ: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(-|f(x)|\right)=0$ ΚΑΙ $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ άρα από Κ.Π. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

$\boxed{A4}$ α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$\boxed{B1}$ ΒΑΖΟΥΜΕ ΟΠΟΥ x ΤΟ $f(x)$ ΣΤΗΝ $g(x)$:

$$g(f(x)) = f(x)+2022$$

Επίσης, $g(f(x)) = \sqrt{x}\cdot \ln x + 2022$ άρα $f(x)+2022=\sqrt{x}\ln x+2022$

$$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x}\cdot\ln x,\quad x>0$$

$\boxed{B2}$ f ΠΑΡ/ΜΗ ΣΤΟ $(0,+\infty)$ ΩΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΑΡ/ΜΩΝ ΜΕ:

▸ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{\sqrt{x}\ln x+2\sqrt{x}}{2x}=\dfrac{\sqrt{x}(\ln x+2)}{2x}=\dfrac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$

▸ $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \ln x+2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \dfrac{1}{e^2}$

x	0		$1/e^2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

o.ε. $= f(1/e^2) = -\dfrac{2}{e}$

• f συνεχής κ' $\downarrow$ στο $A_1=\left(0,\dfrac{1}{e^2}\right] \to f(A_1)=\left[f(1/e^2), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)$

• f συνεχής κ' $\uparrow$ στο $A_2=\left[\dfrac{1}{e^2},+\infty\right) \to f(A_2)=\left[f(1/e^2), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)$

⇒ $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-2\sqrt{x})=0$

άρα $f(A_1)=\left[-\dfrac{2}{e},0\right)$, $f(A_2)=\left[-\dfrac{2}{e},+\infty\right)$

οπότε $f(A)=\left[-\dfrac{2}{e},+\infty\right)$

$\boxed{B3}$ $f''(x) = \left(\dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\right)' = \dots = \dfrac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}, \quad x > 0$

► $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

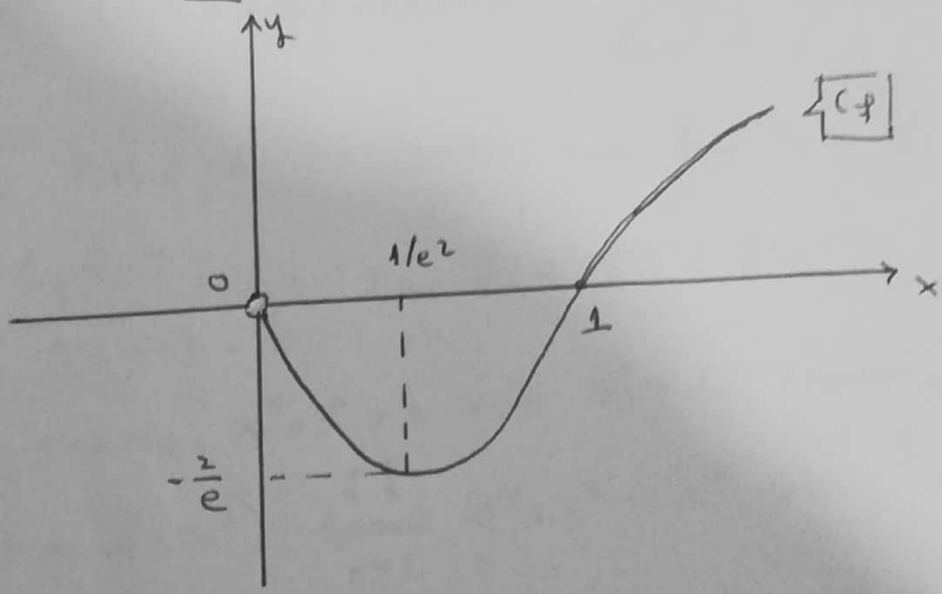
x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\cup$		$\cap$	

ΣΚ → ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ $A(1,0)$

$\boxed{B4}$ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΜΗΣ ΜΕ ΤΟΝ $x'x$: $A(1,0)$

x	0		$1/e^2$		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$\boxed{0}$	↘	$\boxed{-\frac{2}{e}}$	↗	$\boxed{0}$	↗	$\boxed{+\infty}$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ



ΘΕΜΑ Γ

Γ1 f παρ/μη ως πράξεις παρ/μενων με:

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \alpha^{x-1}\cdot \ln\alpha$$

Είναι: $f(x) \le -1 \Leftrightarrow f(x) \le f(1)$ άρα η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1 \in (0,+\infty)$ τοπικό μέγιστο (ολικό) άρα Θ. Fermat

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 2 \Leftrightarrow \ln\alpha = \ln e^2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = e^2}$$

οπότε $f(x) = 2\ln x - e^{2x-2},\ x>0$

Γ2 α) $f''(x) = -\frac{2}{x^2} - 4e^{2x-2} < 0$ άρα $f \frown$ κοίλη στο $(0,+\infty)$

β) $x > 1 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

$x < 1 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\boxed{-1}$	$\searrow$	

Γ3 Εφόσον, $f(x) \le -1\ \forall x \in (0,+\infty)$ τότε $f(5^x) < 0\ \forall x > 0$

άρα $\frac{f(4^x+3^x)}{f(5^x)} > 1 \Leftrightarrow f(4^x+3^x) < f(5^x)$

• Για $x>0$ έχουμε $4^x+3^x > 1$ και $5^x > 1$ οπότε:

$$f(4^x+3^x) < f(5^x) \underset{x>1}{\overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow}} 4^x+3^x > 5^x \overset{:5^x}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 1 > 0 \overset{*}{\Leftrightarrow} h(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(2) \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} x < 2$$

Τελικά $\boxed{0 < x < 2}$

* Θέτουμε $h(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 1,\ x>0$

$h'(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln\frac{4}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5} < 0$ άρα $h\downarrow$

$h(2) = 0$

$\boxed{\Gamma 4}$ $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-1 \Leftrightarrow \boxed{x=1}^{*}$

* ΑΠΟ ΤΟ $\boxed{\Gamma 2}$ ΕΧΟΥΜΕ ΟΤΙ $f(x) \leq -1 \ \forall x>0$ ΚΑΙ ΤΟ ΙΣΟΝ ΙΣΧΥΕΙ ΜΟΝΟ ΟΤΑΝ $x=1$

• $E(\Omega)=\int_1^e |g(x)|\,dx = -\int_1^e g(x)\,dx = -\int_1^e (2\ln x - e^{2x-2}+1)\,dx$

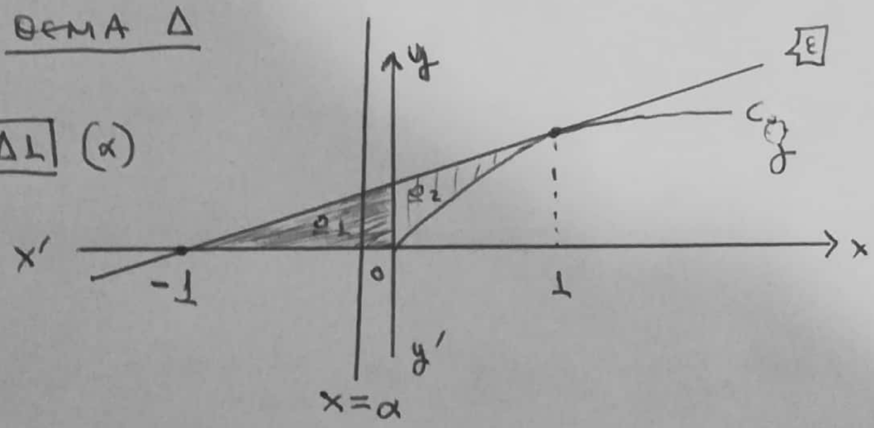
$= \int_1^e (-2\ln x + e^{2x-2} - 1)\,dx = -2\left[x\ln x - x\right]_1^e + \frac{1}{2}\left[e^{2x-2}\right]_1^e - \left[x\right]_1^e$

$= -2(e-e+1)+\frac{1}{2}(e^{2e-2}-1)-(e-1)$

$= -2+\frac{1}{2}e^{2e-2}-\frac{1}{2}-e+1 = \frac{1}{2}e^{2e-2}-\frac{3}{2}-e = \frac{e^{2e-2}-2e-3}{2}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

$\boxed{\Delta 1}$ (α)



• $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$

• $g''(x)=-\frac{1}{(2\sqrt{x})^2\cdot\sqrt{x}}<0$

άρα g κοίλη στο $(0,+\infty)$

• Η εξίσωση (εφ) της $g(x)$ στο $(1,1)$ είναι: $y-g(1)=g'(1)(x-1)$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ (ε). Επειδή g κοίλη στο $(0,+\infty)$ τότε $g(x)\leq y \ \forall x>0$

$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)=\frac{1}{3}$ τ.μ.

* $E(\Omega_1)=\int_{-1}^0\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}x\right]_{-1}^0 = \dots = \frac{1}{4}$ τ.μ.

$E(\Omega_2)=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \dots = \frac{1}{12}$ τ.μ.

β) Εφόσον $E(\Omega_1)>E(\Omega_2)$ τότε $\alpha\in(-1,0)$

οπότε $\frac{E(\Omega)}{2}=\int_{-1}^{\alpha}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx \Leftrightarrow \frac{1}{6}=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right]_{-1}^{\alpha} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 3\alpha^2+6\alpha+1=0$

$\alpha_1=-1+\frac{\sqrt{6}}{3}$ ΔΕΚΤΗ ή $\alpha_2=-1-\frac{\sqrt{3}}{3}<-1$ Απορρ. Επειδή $\alpha_1\in(-1,0)$

τότε $\boxed{x=-1+\frac{\sqrt{6}}{3}}$

$\boxed{\Delta 2}$ ΘΕΤΟΥΜΕ $w(x) = \dfrac{2f(x) - e^x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow w(x)\eta\mu x + e^x = 2f(x)$

άρα $\lim\limits_{x\to 0} 2f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(w(x)\eta\mu x + e^x\right) \Leftrightarrow 2f(0) = 1 \Leftrightarrow f(0) = \dfrac{1}{2}$

• $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2f(x) - e^x}{\eta\mu x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2f'(x) - 1}{\sigma\upsilon\nu x} = 2f'(0) - 1$

$\Leftrightarrow 2f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = \dfrac{1}{2}$

ΟΠΟΤΕ (ε): $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

ΑΠΟ $\boxed{\Delta 1}$ ΕΧΟΥΜ ΟΤΙ $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ ΕΙΝΑΙ (εφ) ΤΗΣ C_g ΣΤΟ $(1,1)$

ΟΠΟΤΕ η (ε) ΚΟΙΝΗ (εφ) ΤΩΝ C_f κ' C_g

$\boxed{\Delta 3}$ $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ άρα $g''(x) = -\dfrac{1}{(2\sqrt{x})^2}\cdot(2\sqrt{x})' = -\dfrac{1}{(2\sqrt{x})^2}\cdot\dfrac{2}{2\sqrt{x}} < 0$

άρα g $\cap$ ΚΟΙΛΗ ΣΤΟ $[0,+\infty)$

ΟΠΟΤΕ $g(x) \leq \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ $\forall x \geq 0$ ΚΑΙ ΤΟ ΙΣΟΝ ΙΣΧΥΕΙ

ΜΟΝΟ ΟΤΑΝ $x = 1$

Επειδή $f''(x) > 0$ ΤΟΤΕ f $\cup$ ΚΥΡΤΗ ΣΤΟ $\mathbb{R}$ ΟΠΟΤΕ

$f(x) \geq \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ΚΑΙ ΤΟ ΙΣΟΝ ΙΣΧΥΕΙ

ΜΟΝΟ ΟΤΑΝ $x = 0$

Γενικά, $f(x) \geq \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \geq g(x)$ άρα $f(x) > g(x)$

ΟΠΟΤΕ η $f(x) = g(x)$ ΕΙΝΑΙ ΑΔΥΝΑΤΗ

Θεωρούμε $h(x)=(x-1)(x-2)\left(4\int_0^1 f(x)dx-3\right)+x(x-2)\left(\beta f'(\beta)+f(0)-f(\beta)\right)+x(x-1)\left(2f'(\gamma)-1\right)$

- $h(0)=2\left(4\int_0^1 f(x)dx-3\right)$

$h(1)=-\left(\beta f'(\beta)+f(0)-f(\beta)\right)$

$h(2)=2\left(2f'(\gamma)-1\right)$

- Είναι $f(x)\geq \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ και ίσον ισχύει μόνο όταν $x=0$

άρα $\int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx>\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\int_0^1 f(x)dx>3 \Rightarrow \boxed{h(0)>0}$

- f παρ/μη στο $[0,\beta]$ άρα ΘΜΤ $\exists\, \xi\in(0,\beta)$:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(0)}{\beta}$$

- $\xi<\beta \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(\beta) \Leftrightarrow \frac{f(\beta)-f(0)}{\beta}<f'(\beta)$

$\Leftrightarrow f(\beta)-f(0)<\beta f'(\beta) \Leftrightarrow \beta f'(\beta)+f(0)-f(\beta)>0$

$\Rightarrow \boxed{h(1)<0}$

- $\gamma>0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\gamma)>f'(0) \Leftrightarrow f'(\gamma)>\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f'(\gamma)>1$

$\Leftrightarrow 2f'(\gamma)-1>0 \Rightarrow \boxed{h(2)>0}$

- $h(0)h(1)<0$ Θ. Bolzano ... μία τουλ. ρίζα στο $(0,1)$
- $h(1)h(2)<0$ Θ. Bolzano ... μία τουλ. ρίζα στο $(1,2)$

Άρα, από τα διαδοχικά Θ.Β. υπάρχουν $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (1,2)$

τέτοια ώστε $h(x_1)=h(x_2)=0$, μοναδικά γιατί η h

είναι πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού