

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1, Ζωγράφου
☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13, Χολαργός
☎ 210 65 36 551

Ημερομηνία : 26/3/2022

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat.

A2. Να δώσετε τον ορισμό της αρχικής μιας συνάρτησης f ορισμένης σε ένα διάστημα Δ .

A3. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός :

« Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ »

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως αληθείς ή ψευδείς

α) Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε για την αντίστροφη της f^{-1} ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x, x \in f(A)$

β) Αν $0 < \alpha < 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$

γ) Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση

ε) Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του A τότε η συνάρτηση είναι σταθερή στο A

Μονάδες : 8 – 3 – 4 – 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g(x) = x + 2022$ για τις οποίες ισχύει $(g \circ f)(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x + 2022$, για κάθε $x > 0$.

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x, x > 0$.

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1, Ζωγράφου
☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13, Χολαργός
☎ 210 65 36 551

www.en-dynamei.gr

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

B4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **B2, B3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες : 4 – 9 – 8 – 4

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x - \alpha^{x-1}$, $x > 0$, όπου $\alpha > 0$.

Γ1. Αν ισχύει $f(x) \leq -1$ για κάθε $x > 0$ να δείξετε ότι $\alpha = e^2$.

Για $\alpha = e^2$

Γ2. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Γ3. Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{f(4^x+3^x)}{f(5^x)} > 1$, για $x > 0$.

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα x' και την ευθεία $x = e$.

Μονάδες : 5 – 8 – 6 – 6

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ για τις οποίες ισχύει :

- Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}
- $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - e^x}{\eta \mu x} = 0$

Δ1. α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της g , την εφαπτομένη της στο σημείο $(1,1)$ και τον άξονα των x .

β) Να βρείτε την ευθεία $x = \alpha$, η οποία χωρίζει το χωριο αυτό σε δυο ισεμβαδικά χωρία.

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1, Ζωγράφου
☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13, Χολαργός
☎ 210 65 36 551

www.en-dynamei.gr

Δ2. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g .

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$\frac{4 \int_0^1 f(x) dx - 3}{x} + \frac{\beta f'(\beta) + f(0) - f(\beta)}{x-1} + \frac{2f'(\gamma) - 1}{x-2} = 0, \text{ όπου } \beta, \gamma > 0$$

έχει ακριβώς δυο ρίζες ως προς x , μια στο διάστημα στο $(0,1)$ και μια στο διάστημα $(1,2)$.

Μονάδες : 8 – 5 – 4 – 8