Λύσεις διαγωνίσματος Γ' λυκείου 21/5/2022 επαναληπτικό

ΘΕΜΑ Α

Α1 – γ   Α2 – β   Α3 – γ   Α4 – α   Α5 Λ Λ Λ Λ Σ

ΘΕΜΑ Β

$\boxed{B1 - \beta}$ Bernoulli από την επιφάνεια στην οπή:

$$\cancel{P_{\alpha\tau\mu\,\varepsilon\pi\iota\varphi}} + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho V_{\varepsilon\pi\iota\varphi}^2} + \rho g(H-h) = \cancel{P_{\alpha\tau\mu\,o\pi\eta\varsigma}} + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + 0 \Rightarrow v = \sqrt{2g(H-h)}$$

Για οπή ύψους h_1: $v_1 = \sqrt{2g(H-h_1)}$

Για οπή ύψους h_2: $v_2 = \sqrt{2g(H-h_2)}$

Για την οριζόντια βολή κάθε φλέβας ισχύει:

$$h = \tfrac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{και} \quad x = v \cdot t = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Όμως $x_1 = x_2 \Rightarrow v_1\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = v_2\sqrt{\frac{2h_2}{g}} \Rightarrow v_1^2 \frac{2h_1}{\cancel{g}} = v_2^2 \frac{2h_2}{\cancel{g}}$

$$\Rightarrow \cancel{2g}(H-h_1)\cdot h_1 = \cancel{2g}(H-h_2)h_2 \Rightarrow h_1 H - h_1^2 = h_2 H - h_2^2$$

$$\Rightarrow (h_1-h_2)H = h_1^2 - h_2^2 \Rightarrow \cancel{(h_1-h_2)}H = \cancel{(h_1-h_2)}(h_1+h_2) \Rightarrow H = h_1 + h_2 = 5h_1$$

Άρα $v_1 = \sqrt{2g(5h_1 - h_1)} = \sqrt{8gh_1} = 2\sqrt{2gh_1}$

$v_2 = \sqrt{2g(5h_1 - 4h_1)} = \sqrt{2gh_1}$

Σταθερή στάθμη: $\Pi_{\beta\rho\dot{\upsilon}\sigma\eta\varsigma} = \Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = A\cdot v_1 + A \cdot v_2$

$$\Rightarrow \Pi = A \cdot 2\sqrt{2gh_1} + A\sqrt{2gh_1} \Rightarrow \boxed{\Pi = 3A\sqrt{2gh_1}}$$ (β)

$\boxed{B2 - \alpha}$ (1) $\rightarrow v_1$ (2) $v_2 = 0$ ΔΚΕ: $K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\varepsilon\tau\dot{\alpha}} \Rightarrow K_1 = K_1' + K_2'$

$\Rightarrow K_2' = K_1 - K_1'$ όμως $K_2' = K_1$ δηλαδή $K_1' = 0 \Rightarrow v_1' = 0$

$\Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2.$

Αν οι σφαίρες έχουν ίσες κινητικές ενέργειες τότε:

$K_1 = K_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \Rightarrow v_1 = v_2 \rightarrow$ κατά μέτρο $m_1 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow P_1 = P_2$

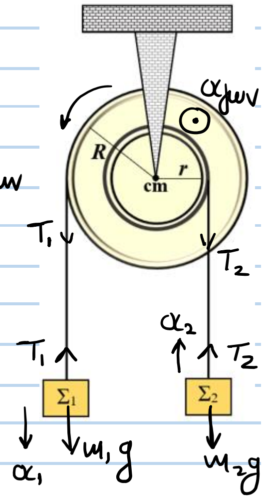
(1) $\rightarrow v_1$ $v_2 \leftarrow$ (2) $\Big\{$ (12) $v_K = 0$ $\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\dot{\alpha}} \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_K$

$\Rightarrow P_1 - P_2 = P_K \Rightarrow P_K = 0 \rightarrow v_K = 0 \rightarrow K_{o\lambda\,\mu\varepsilon\tau\dot{\alpha}} = 0$

ΑΔΕ στην κρούση: $E_{πριν} = E_{μετά} \Rightarrow K_{ολ\,πριν} = \overset{0}{K_{ολ\,μετά}} + E_{απωλειών}$

$\Rightarrow E_{απωλειών} = K_{ολ\,πριν} = K_1 + K_2 \rightarrow π = \frac{E_{απωλειών}}{K_{ολ\,πριν}} 100\,\% \Rightarrow \boxed{π = 100\%}$ (α)

$\boxed{B3-α}$ Συγκρίνοντας τις εξωτερικές ροπές η τροχαλία στρέφεται αριστερόστροφα $τ_{m_1 g} = m_1 g R > τ_{m_2 g} = m_2 g r$



Ισχύουν: $υ_2 = υ_{γρ_r} = r \cdot ω \rightarrow \frac{dυ_2}{dt} = \frac{dυ_{γρ_r}}{dt} = r\frac{dω}{dt} \Rightarrow α_2 = α_{ε_r} = r α_{γων}$

$υ_1 = υ_{γρ_R} = R ω \rightarrow \frac{dυ_1}{dt} = \frac{dυ_{γρ_R}}{dt} = R\frac{dω}{dt} \Rightarrow α_1 = α_{ε_R} = R α_{γων}$

και $α_2 = r α_{γων} = \frac{1}{2} R \cdot α_{γων} = \frac{1}{2} α_1 \Rightarrow α_2 = \frac{α_1}{2}$

ΘΝΜ:

$Σ_1 : ΣF_1 = m_1 α_1 \Rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 α_1 \Rightarrow mg - T_1 = m \cdot α_1$ (1)

$Σ_2 : ΣF_2 = m_2 α_2 \Rightarrow T_2 - m_2 g = m_2 α_2 \Rightarrow T_2 - mg = \frac{1}{2} m α_1$ (2)

ΘΝΣ: $Στ_{τροχ} = I_{cm} α_{γων} \Rightarrow T_1 R - T_2 r = m R^2 α_{γων} \Rightarrow T_1 R - \frac{1}{2} T_2 R = m R^2 α_{γων}$

$\Rightarrow T_1 - \frac{1}{2} T_2 = m \boxed{R α_{γων}} \Rightarrow T_1 - \frac{1}{2} T_2 = m \cdot α \Rightarrow 2T_1 - T_2 = 2m \cdot α$ (3)

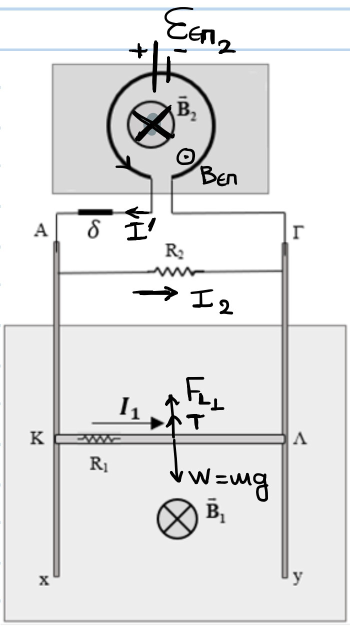
(1) $\xrightarrow{επί\ 2}$ $2mg - 2T_1 = 2m \cdot α_1$ (1')

Προσθέτοντας κατά μέλη (1') + (2) + (3) $\Rightarrow 2mg - mg = 2mα_1 + \frac{1}{2} m α_1 + 2mα_1$

$\Rightarrow mg = \frac{9}{2} m α_1 \Rightarrow α_1 = \frac{2}{9} g$

$\frac{dL_{τροχ}}{dt} = Στ_{τροχ} = I_{cm} α_{γων} = m R^2 α_{γων} = m R \boxed{R α_{γων}} = m R α \Rightarrow \boxed{\frac{dL_{τροχ}}{dt} = \frac{2}{9} m g R}$ (α)

ΘΕΜΑ Γ

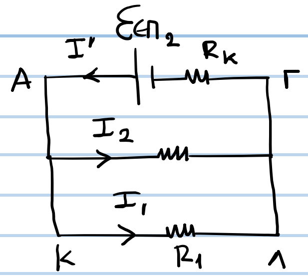


$\boxed{Γ1}$ α) Ο αγωγός δέχεται δύναμη Laplace αντίρροπη του βάρους μέτρου $F_{L_1} = B_1 I_1 \ell = 3N$

Συγκρίνοντας $w = mg = 5N > F_{L_1} = 3N$ για να ισορροπεί ο αγωγός θα πρέπει να δέχεται από τους οδηγούς (συνολικά) δύναμη τριβής $\vec{T}$ με φορά προς τα πάνω. Ισχύει $ΣF = 0 \Rightarrow$

$F_{L_1} + T = w \Rightarrow \boxed{T = 2N}$

β) Οι αντιστάσεις R_1, R_2 είναι παράλληλες



και ισχύει $R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} = 0,24\,\Omega$

Ακόμα ισχύει $V_{R_1} = V_{R_2} \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2$

$\Rightarrow 0,4 I_1 = 0,6 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{2}{3} I_1 = 2A$

Όμως $I' = I_1 + I_2 = 5A$ και $\mathcal{E}_{επ_2} = I' \cdot R'_{ολ}$

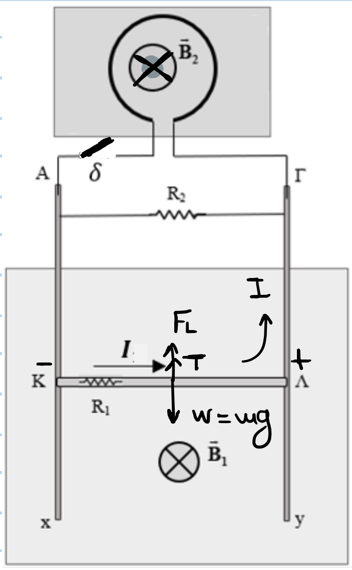
όπου $R'_{ολ} = R_κ + R_{1,2} = 3\,\Omega$ άρα $\mathcal{E}_{επ_2} = 15$ Volt

Νόμος Faraday: $\mathcal{E}_{επ_2} = N\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = N\frac{\Delta B_2 \cdot A}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta B_2}{\Delta t} = \frac{\mathcal{E}_{επ_2}}{N \cdot A}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta B_2}{\Delta t} = \frac{15}{100 \cdot 0,5}\ T/s \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta B_2}{\Delta t} = 0,3\ T/s}$$

Το επαγωγικό ρεύμα αντιστέται στο αίτιο που το προκαλεί (εδώ είναι η αύξηση του μέτρου της έντασης $\vec{B}_2$). Οπότε θα πρέπει η κατεύθυνση της έντασης $\vec{B}_2$ να είναι αντίρροπη της έντασης $\vec{B}_{επ}$ ($\odot$) λόγω του επαγωγικού ρεύματος I'. Άρα $\boxed{\vec{B}_2 \otimes}$

Γ2) Όταν ανοίξει ο διακόπτης ο αγωγός λόγω του βάρους του θα επιταχυνθεί προς τα κάτω και λόγω της κίνησής του στο ΟΜΠ $\vec{B}_1$ μεταβάλλεται η μαγνητική ροή οπότε εμφανίζει ΗΕΔ $\mathcal{E}_{επ} = \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = \frac{B_1 \Delta S}{\Delta t} = \frac{B_1 \Delta y\, \ell}{\Delta t}$



$\Rightarrow \mathcal{E}_{επ} = B_1 v \cdot \ell$.

Λόγω της ΗΕΔ δημιουργείται επαγωγικό ρεύμα $I_{επ} = I$ οπότε στον αγωγό θα ασκείται και δύναμη Laplace. Η ταχύτητα του αγωγού αυξάνεται οπότε αντίστοιχα αυξάνονται η ΗΕΔ $\mathcal{E}_{επ}$, το επαγωγικό ρεύμα $I = \frac{\mathcal{E}_{επ}}{R_{ολ}}$ και η δύναμη Laplace $F_L = BI\ell$. Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται ο αγωγός $\Sigma F = w - F_L - T$ μειώνεται μέχρι να μηδενιστεί οπότε ο αγωγός θα αποκτήσει οριακή ταχύτητα v_{op}.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_L = w - T \Rightarrow BI\ell = w - T \Rightarrow B\frac{B v_{op}\ell}{R_{ολ}}\ell = w - T \Rightarrow \frac{B^2\ell^2}{R_{ολ}} v_{op} = w - T$$

$$\Rightarrow \upsilon_{op} = \frac{(W-T)\,R_{o\lambda}}{B^2\ell^2} = \frac{(mg-T)(R_1+R_2)}{B^2\cdot\ell^2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{op} = 3\ m/s}$$

Γ3 Εφαρμόζοντας την ΑΔΕ από την $t=0$ που $\upsilon=0$ έως ότου $\upsilon=\upsilon_{op}$

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \cancel{K_{\alpha\rho\chi}} + W_{mg} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + |W_T| + Q_{R o\lambda}$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_{op}^2 + T\cdot h + Q_{R o\lambda} \Rightarrow 30\,J = 2{,}25\,J + 12\,J + Q_{R o\lambda}$$

$\Rightarrow Q_{R o\lambda} = 15{,}75\,J \rightarrow$ θερμότητα που παράγεται λόγω φαινομένου Joule στις αντιστάσεις της διάταξης.

Η ηλεκτρική ενέργεια που παράγει η ΗΕΔ $E_{\varepsilon\pi}$ $(W_{\eta\lambda})_{E\varepsilon\pi}$ μετατρέπεται σε θερμότητα στις αντιστάσεις $(R_{o\lambda} = R_1 + R_2)$. Άρα $\boxed{W_{\eta\lambda})_{E\varepsilon\pi} = Q_{R o\lambda} = 15{,}75\,J}$

Γ4 $\frac{dQ_T}{dt} = \frac{2\cdot dQ_{R_1}}{dt} \Rightarrow \frac{|dW_T|}{dt} = \frac{2\cdot dQ_{R_1}}{dt} \Rightarrow T\cdot\upsilon = 2\cdot I^2 R_1$

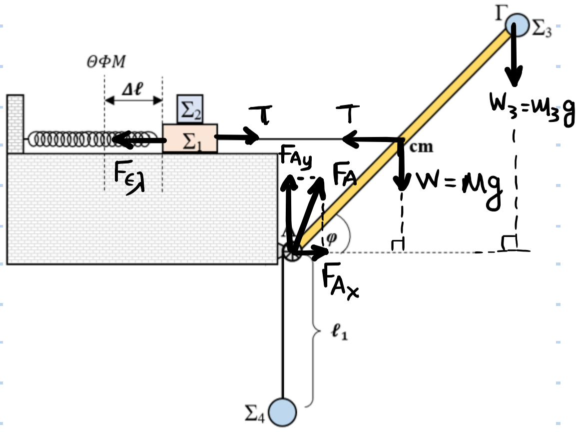
$$\Rightarrow T\cdot\upsilon = 2\cdot\left(\frac{B\upsilon\ell}{R_{o\lambda}}\right)^2\cdot R_1 \Rightarrow T\cdot\upsilon = \frac{2\cdot B^2\ell^2\cdot\upsilon^2}{R_{o\lambda}}\cdot R_1 \Rightarrow T = \frac{2\cdot B^2\ell^2\cdot R_1}{R_{o\lambda}}\cdot\upsilon$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{2\cdot 1\cdot 1\cdot 0{,}4}{1}\,\upsilon \Rightarrow \upsilon = 2{,}5\ m/s.$$

Ισχύει $\frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -\frac{dW_w}{dt} = -\frac{+w\cdot dy}{dt} = -mg\upsilon = -12{,}5\,\frac{J}{s} \Rightarrow \boxed{\frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -12{,}5\,\frac{J}{s}}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Για την ισορροπία της δοκού:



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{Ax} = T$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} = W + W_3 = Mg + m_3 g = 28\,N$

$\Sigma\tau_A = 0 \Rightarrow \tau_T - \tau_W - \tau_{W_3} = 0$

$\Rightarrow T\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi = Mg\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi + m_3 g\ell\,\sigma\upsilon\nu\varphi$

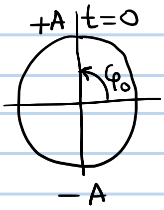
$\Rightarrow 0{,}4T = 7{,}2N + 2{,}4N \Rightarrow T = 24\,N = F_{Ax}$

Ισχύει $\vec{F_A} = \vec{F_{Ax}} + \vec{F_{Ay}} \longrightarrow$ Μέτρο $F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{24^2 + 28^2}\,N \Rightarrow \boxed{F_A = \sqrt{1360}\,N}$

Δ2 Στην ισορροπία του συστήματος σώματα Σ_1, Σ_2 − ελατήριο έχουμε: $\Sigma F_{1,2x} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = T \Rightarrow k\Delta\ell = T \Rightarrow \Delta\ell = T/k \Rightarrow \Delta\ell = 0{,}25\,m$

Μόλις κοπεί το νήμα το σύστημα ξεκινά να εκτελεί αατ από την ακραία θέση +A και το πλάτος είναι $A = \Delta\ell = 0{,}25\,m$.

Άρα την $t=0$ $x=+A$ οπότε η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = \pi/2$ rad.



Ισχύει $D=k \Rightarrow (m_1+m_2)\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = 4\ rad/s$.

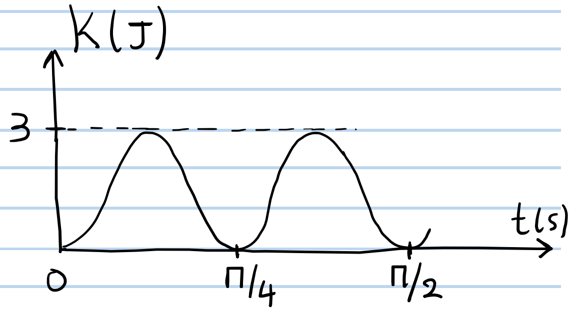
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi/2 \text{ sec}$$

Για την εξίσωση:

$$K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{max}^2\,\text{συν}^2(\omega t+\varphi_0)$$

όπου $v_{max} = \omega A = 1\,m/s$.

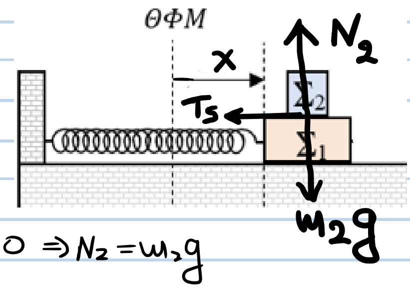
άρα $\boxed{K = 3\,\text{συν}^2(4t+\pi/2)\ \text{SI}}$



Δ3) Η στατική τριβή για το σώμα Σ_2 είναι η δύναμη επαναφοράς

Άρα $\Sigma F_2 = T_s = m_2\alpha = -m_2\omega^2 x$

κατά μέτρο $T_s = m_2\omega^2|x|$



Για να μην ολισθαίνει το Σ_2 πάνω στο Σ_1

πρέπει $T_s \le T_{smax}$ όπου $T_{smax} = \mu_s N_2$, $\Sigma F_{2y} = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g$

$\Rightarrow m_2\omega^2|x| \le \mu_s m_2 g$ $\qquad T_{smax} = \mu_s m_2 g$

$\Rightarrow \mu_s \geq \dfrac{\omega^2|x|}{g}$ όπου $|x| = A = 0{,}25\,m$

$\Rightarrow \mu_s \geq \dfrac{16\cdot 0{,}25}{10} \Rightarrow \mu_s \geq 0{,}4 \longrightarrow \boxed{\mu_{s\,min} = 0{,}4}$

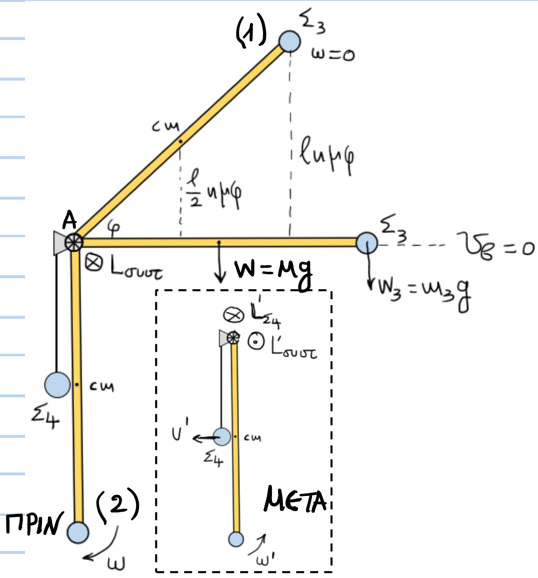
Δ4) Για τη ροπή αδράνειας του συστήματος δοκός ΑΓ − Σ_3 έχουμε: $I_{(o)A} = I_{A\Gamma} + I_{\Sigma_3}$

$\Rightarrow I_{(o)A} = I_{cm} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_3\ell^2$

$\Rightarrow I_{(o)A} = \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4}\right) + m_3\ell^2$

$\Rightarrow I_{(o)A} = \frac{1}{3}M\ell^2 + m_3\ell^2 = 1{,}2\,kg\,m^2$

ΘΝΣ: $\Sigma\tau_A = I_{(o)A}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{\Sigma\tau_A}{I_{(o)A}}$



$$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\tau_w + \tau_{w_3}}{I_{o\lambda A}} = \frac{Mg\frac{l}{2} + m_3 g l}{I_{o\lambda A}} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{40}{3}\frac{rad}{s^2} \otimes}$$

Δ5 ΑΔΜΕ για σύστημα δοκος – $Σ_3$ από την αρχική θέση (1) στην

κατακόρυφη θέση (2) : $E_{MHX(1)} = E_{MHX(2)} \Rightarrow K_{o\lambda(1)} + U_{o\lambda(1)} = K_{o\lambda(2)} + U_{o\lambda(2)}$

$$\Rightarrow U_{M(1)} + U_{m_3(1)} = \frac{1}{2} I_{o\lambda} \omega^2 + U_{M(2)} + U_{m_3(2)}$$

$$\Rightarrow Mg\frac{l}{2}\eta\mu\varphi + m_3 g l \eta\mu\varphi = \frac{1}{2} I_{o\lambda}\omega^2 - Mg\frac{l}{2} - m_3 g l$$

$$\Rightarrow 0{,}8\, Mg\frac{l}{2} + 0{,}8\, m_3 g l = \frac{1}{2} I_{o\lambda}\omega^2 - Mg\frac{l}{2} - m_3 g l$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I_{o\lambda}\omega^2 = 1{,}8 Mg\frac{l}{2} + 1{,}8\, m_3 g l$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} 1{,}2\cdot\omega^2 = 1{,}8\cdot 12 + 1{,}8\cdot 4 \Rightarrow 0{,}6\omega^2 = 16\cdot 1{,}8 \Rightarrow \omega^2 = 3\cdot 16 \Rightarrow \omega = 4\sqrt{3}\,\frac{rad}{s}$$

Για την κρούση $(\Sigma\tau_{εξ} = 0)$ ΑΔΣ : $\vec{L}_{πριν} = \vec{L}_{μετά} \Rightarrow \vec{L}_{συστ} = \vec{L}'_{συστ} + \vec{L}'_{Σ_4}$

$(\otimes +) \Rightarrow L_{συστ} = -L'_{συστ} + L'_{Σ_4} \Rightarrow I_{o\lambda}\omega = -I_{o\lambda}\omega' + m_4 \upsilon' \cdot \frac{l}{2}$ (1)

$\Rightarrow I_{o\lambda}(\omega + \omega') = m_4 \upsilon' \frac{l}{2}$ (2)

<u>Ελαστική κρούση</u>

ΔΚΕ : $K_{o\lambda πριν} = K_{o\lambda μετά} \Rightarrow K_{συστ} = K'_{συστ} + K'_{Σ_4}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} I_{o\lambda A}\omega^2 = \frac{1}{2} I_{o\lambda A}\omega'^2 + \frac{1}{2} m_4 \upsilon'^2 \Rightarrow I_{o\lambda A}(\omega^2 - \omega'^2) = m_4 \upsilon'^2$

$\Rightarrow I_{o\lambda A}(\omega + \omega')(\omega - \omega') = m_4 \upsilon'^2$ (3)

Διαιρώ κατά μέλη $\frac{(3)}{(2)} \Rightarrow \omega - \omega' = \frac{2\upsilon'}{l} \Rightarrow \omega - \omega' = 2\upsilon'$ (4)

(1) $\Rightarrow 1{,}2\omega = -1{,}2\omega' + 2{,}4\upsilon' \Rightarrow \omega + \omega' = 2\upsilon'$ (5)

(4) + (5) $\Rightarrow 2\omega = 4\upsilon' \Rightarrow \omega = 2\upsilon' \Rightarrow 4\sqrt{3} = 2\upsilon' \Rightarrow \boxed{\upsilon' = 2\sqrt{3}\ m/s}$

(4) $\Rightarrow 4\sqrt{3} - \omega' = 2\cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\omega' = 0}$