Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 7/05/22

Α3) Ψ π.χ. $f(x)=\begin{cases} \ln x, & x>0 \\ x^2+1, & x\le 0\end{cases}$ $D_f=\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

άρα $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη

Α4) 1) Λ 2) Σ 3) Λ 4) Σ 5) Σ

ΘΕΜΑ Β

Γ1) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

x		0	
f'	+	0	−
f	↗		↘

ο.μ. $f(0)=1$

Γ2) $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2$

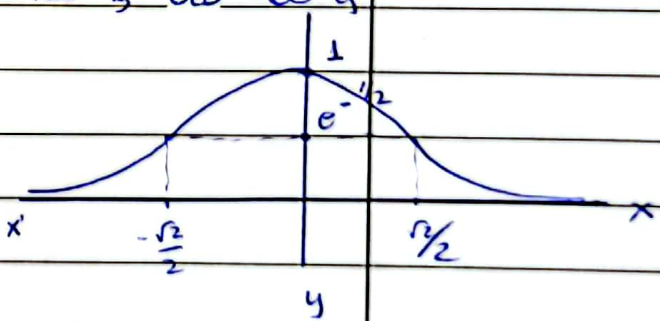
x		$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$	
f''	+		−		+
f	∪		∩		∪

Σ.Κ Σ.Κ

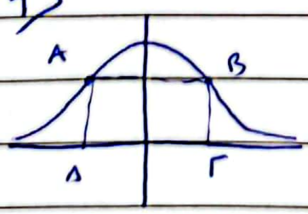
Γ3) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} \;\; \dfrac{-x^2=u}{\substack{x\to-\infty\\ u\to-\infty}} \;\; \lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dots = 0$ άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$ η

x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
f''	+		−		−		+
f'	+		+		−		−
f	0 ↗		↗		↘		↘ 0



Γ4)



f άρτια άρα αν $\Gamma(x,0)$ τότε $\Delta(-x,0)$ και $B(x, e^{-x^2})$ $A(-x, e^{-x^2})$

ΑΒΓΔ τετράγωνο άρα $\Gamma\Delta = B\Gamma \iff 2x = e^{-x^2} \iff e^{-x^2} - 2x = 0$

Έστω $g(x)=e^{-x^2}-2x$ στο $[0,\frac{1}{2}]$

g συνεχής ως διαφορά συνεχών

$\left.\begin{array}{l} g(0)=1 \\ g(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}-1<0 \end{array}\right\} g(0)\cdot g(1/2)<0$

από Θ. Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0\in(0,\frac{1}{2})$ τ.ω.

$g(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{-x^2}=2x$

$g'(x)=-2xe^{-x^2}-2<0$ άρα $g\downarrow$ οπότε το x_0 μοναδικό

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) $x^2+f^2(x)=16 \Leftrightarrow f^2(x)=16-x^2$

$f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow 16-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm 4$

$f^2(x)=16-x^2 \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{16-x^2}$

f συνεχής στο $[-4,4]$ και $f(x)\neq 0$ $\forall x\in(-4,4)$ άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-4,4)$ και επειδή $f(0)=4$ είναι $f(x)>0$ άρα $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ $\forall x\in(-4,4)$ και επειδή $f(4)=f(-4)=0$ είναι

$f(x)=\sqrt{16-x^2}$ $\forall x\in[-4,4]$

Γ2) $O\hat{K}\Gamma$ ορθογώνιο

$OK=4\sigma\upsilon\nu\theta$ και $K\Gamma=4\eta\mu\theta$

$(AB\Gamma\Delta)=\frac{(AB+\Gamma\Delta)OK}{2}=\frac{8+2K\Gamma}{2}OK=\frac{8+8\eta\mu\theta}{2}4\sigma\upsilon\nu\theta=$

$(4+4\eta\mu\theta)4\sigma\upsilon\nu\theta=16(1+\eta\mu\theta)\sigma\upsilon\nu\theta$

Γ3) $E'(\theta)=16\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta-(1+\eta\mu\theta)\eta\mu\theta\right)=16\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu\theta-\eta\mu^2\theta\right)=$

$=16(1-\eta\mu^2\theta-\eta\mu\theta-\eta\mu^2\theta)=16(-2\eta\mu^2\theta-\eta\mu\theta+1)$

$E'(\theta)=0 \Leftrightarrow \eta\mu\theta=1/2$ ή $\eta\mu\theta=-1$ απορ. γιατί $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

$E'(\theta)>0 \Leftrightarrow -16\cdot 2(\eta\mu\theta-\frac{1}{2})\underbrace{(\eta\mu\theta+1)}_{\geq 0}>0 \Leftrightarrow \eta\mu\theta-1/2<0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu\theta<1/2 \Leftrightarrow \eta\mu\theta<\eta\mu\frac{\pi}{6} \overset{\eta\mu\theta\uparrow}{\underset{(0,\frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow}} \theta<\frac{\pi}{6}$

Παρατηρήσεις

άρα

θ	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$f'(\theta)$		$+$		$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Γ4) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+\eta\mu^2\theta}{16(1-\eta\mu^4\theta)\sigma\upsilon\nu\theta}\, d\theta = \frac{1}{16}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\, d\theta = \frac{1}{16}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}\, d\theta =$

$\displaystyle\frac{1}{16}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu^2\theta}\, d\theta$

Θέτω $\eta\mu\theta = u \to \sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta = du$

$\theta = \frac{\pi}{6} : u = \eta\mu\frac{\pi}{6} = 1/2$

$\theta = \frac{\pi}{4} : u = \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

άρα $\displaystyle I = \frac{1}{16}\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-u^2}\, du$

$\displaystyle\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} = \frac{A(1+u)+B(1-u)}{(1-u)(1+u)} = \frac{(A-B)u + A+B}{(1-u)(1+u)}$ άρα

$\begin{cases} A-B=0 \\ A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} = B.$

$\displaystyle I = \frac{1}{16}\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{A}{1-u}\, du + \frac{1}{16}\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{B}{1+u}\, du = \frac{1}{16}\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1/2}{1-u}\, du + \frac{1}{16}\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1/2}{1+u}\, du =$

$\displaystyle = \frac{1}{32}\Big[\ln|1-u|\Big]_{1/2}^{\sqrt{2}/2} + \frac{1}{32}\Big[\ln|1+u|\Big]_{1/2}^{\sqrt{2}/2} = \dots$

Scanned with CamScanner

Παρατηρήσεις

Θέμα Δ

Δ1) $(f'(x))^2 = f^2(x)+4$ παραγωγίζω τη σχέση

$2f'(x)f''(x) = 2f'(x)f(x) \overset{f'(x)\neq 0}{\iff} f''(x) = f(x) \iff$

$f''(x)+f'(x) = f'(x)+f(x) \iff (f'(x)+f(x))' = f'(x)+f(x) \iff$

$f'(x)+f(x) = c\cdot e^x$

Για $x=0$: $f'(0)+f(0) = c \iff c=2$ άρα $f'(x)+f(x) = 2e^x \iff$

$e^x f'(x) + e^x f(x) = 2e^{2x} \iff (e^x f(x))' = (e^{2x})' \iff e^x f(x) = e^{2x}+c_2$

Για $x=0$: $f(0) = 1+c \iff c=-1$.

άρα $e^x f(x) = e^{2x}-1 \iff \boxed{f(x) = e^x - e^{-x}}$

Δ2) $f'(x) = e^x + e^{-x} > 0$ άρα $f \uparrow$

$f(e^x) < f(\sqrt{x^2+1}) \overset{f\uparrow}{\iff} e^x < \sqrt{x^2+1} \iff \frac{\sqrt{x^2+1}}{e^x} > 1$

Έστω $h(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{e^x}$, $h'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}e^x - e^x\sqrt{x^2+1}}{e^{2x}} =$

$\frac{e^x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1}\right)}{e^{2x}} = \frac{x-x^2-1}{e^x} = \frac{-(x^2-x+1)}{e^x} < 0$

για x^2-x+1: $\Delta<0$ άρα $x^2-x+1>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$, $e^x>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

άρα $h \downarrow$ και $h(0)=1$

$h(x) > 1 \iff h(x) > h(0) \overset{h\downarrow}{\iff} x<0$.

Δ3) $e^{2x} - e^{k+x} = 1+4e^x \iff e^{2x} - e^k e^x = 1+4e^x \overset{(:e^x)}{\iff}$

$e^x - e^k = e^{-x}+4 \iff e^x - e^{-x} = e^k+4 \iff f(x) = e^k+4$

Από Δ2 $f\uparrow$ άρα $f(\mathbb{R}) = f((-\infty,+\infty)) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (-\infty,+\infty)$

$e^k+4 \in f((-\infty,+\infty))$ άρα η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα και $f\uparrow$

άρα η ρίζα μοναδική

14) $f(x)=e^{x}-e^{-x}$

$f(-x)=e^{-x}-e^{x}=-(e^{x}-e^{-x})=-f(x)$ άρα f περιττή

• $J=\int_{-2022}^{2022} f^{3}(x)\,dx$ Θέτω $x=-u \Rightarrow dx=-du$

$x=2022 \Rightarrow u=-2022$

$x=-2022 \Rightarrow u=2022$

$J=\int_{2022}^{-2022} f^{3}(-u)\,d(-u)=-\int_{2022}^{-2022} f^{3}(-u)\,du=\int_{-2022}^{2022} f^{3}(-u)\,du \overset{\text{περιττή}}{=} -\int_{-2022}^{2022} f^{3}(u)\,du \Leftrightarrow$

$J=-J \Leftrightarrow 2J=0 \Leftrightarrow J=0.$

• $x\in[0,1]$ και $f \nearrow$ άρα $x\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq f(0)=0$ και $x^{2021}\geq 0$ $\Big\} \Rightarrow |x^{2021}f(x)|=x^{2021}f(x)$

• $\int_{0}^{f(1)} \left(f^{-1}(x)\right)^{2022} dx$

Θέτω $f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=f(u) \Rightarrow dx=f'(u)\,du$

$x=0: \; f(u)=0 \Leftrightarrow f(u)=f(0) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} u=0$

$x=f(1): \; f(u)=f(1) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} u=1$

άρα $\int_{0}^{1} u^{2022} f'(u)\,du=\left[u^{2022}f(u)\right]_{0}^{1}-\int_{0}^{1} 2022\,u^{2021}f(u)\,du=$

$=f(1)-2022\int_{0}^{1} x^{2021}f(x)\,dx$ Επομένως

$\int_{0}^{f(1)} \left(f^{-1}(x)\right)^{2022} dx+2022\int_{0}^{1}|x^{2021}f(x)|\,dx=f(1)+\int_{-2022}^{2022} f^{3}(x)\,dx \Leftrightarrow$

$f(1)-2022\int_{0}^{1} x^{2021}f(x)+2022\int_{0}^{1} x^{2021}f(x)\,dx=f(1)+0 \Leftrightarrow$

$f(1)=f(1)$