

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

7/05/2022

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{x}. \quad (6 \text{ μονάδες})$$

A2. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού (5 μονάδες)

A3. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη».

Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως αληθή ή ψευδή **(1 μονάδα)** και να δώσετε ένα παράδειγμα που να επιβεβαιώνει την απάντησή σας. **(3 μονάδες)**

A4. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος

1. Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα έχει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή
2. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα τότε έχουν ένα το πολύ κοινό σημείο
3. Αν για τη συνεχή συνάρτηση f στο $[a, \beta]$ ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) > 0$ τότε η C_f δεν τέμνει τον $x'x$.
4. Αν f συνεχής στο Δ και $a, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx$
5. $\int_1^e \ln x dx = \int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt$

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$.

Γ1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (5 μονάδες)

Γ2. Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής (7 μονάδες)

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση (3 – 4 μονάδες)

Γ4. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο ώστε $A, B \in C_f$ και Δ, Γ οι προβολές τους στον άξονα $x'x$ με $\Gamma(x, 0)$, $x > 0$.

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο Γ , με τετμημένη που ανήκει στο $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι

τετράγωνο.

(6 μονάδες)

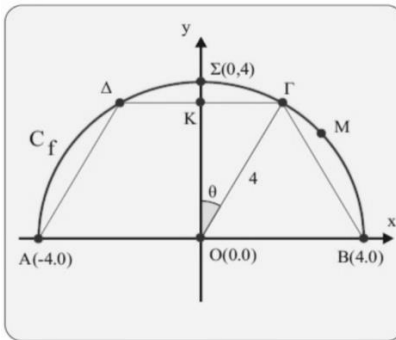
1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1, Ζωγράφου
☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13, Χολαργός
☎ 210 65 36 551

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $f(0) = 4$ και $x^2 + f^2(x) = 16$ για κάθε $x \in [-4, 4]$.

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης. **(5 μονάδες)**

Για τα παρακάτω ερωτήματα δίνεται ότι $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $x \in [-4, 4]$. Επίσης το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο, που παριστάνει τη C_f .



Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τραπεζίου δίνεται από τη σχέση $E(\theta) = 16(\eta\mu\theta + 1)\sigma\upsilon\nu\theta$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(7 μονάδες)

Γ3. Να βρείτε την τιμή του θ , για την οποία το εμβαδόν του τραπεζίου μεγιστοποιείται.

(8 μονάδες)

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \eta\mu\theta}{E(\theta)} d\theta$.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f , 2 φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει $(f'(x))^2 = f^2(x) + 4$ για κάθε x και $f(0) = 0$ και $f'(0) = 2$.

Δ1. Να βρείτε το τύπο της συνάρτησης f .

(8 μονάδες)

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = e^x - e^{-x}$.

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1, Ζωγράφου
☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13, Χολαργός
☎ 210 65 36 551



Δ2. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x) - f(\sqrt{x^2 + 1}) < 0$. (6 μονάδες)

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{2x} - e^{k+x} = 1 + 4e^x$, για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$.

(4 μονάδες)

Δ4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και θεωρώντας γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να

δείξετε ότι $\int_0^{f(1)} (f^{-1}(x))^{2022} dx + 2022 \int_0^1 |x^{2021} f(x)| dx = f(1) + \int_{-2022}^{2022} f^3(x) dx$ (7 μονάδες)