Διαγώνισμα Μαθηματικών Γ' Λυκείου (26/11/2022)

<u>1ο ΘΕΜΑ</u>

Α3: Ο ισχυρισμός είναι ψευδής.
Στο x=0 η f δεν είναι παραγωγίσιμη:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\,\cancel{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

Α4: α) ΛΑΘΟΣ, β) ΛΑΘΟΣ, γ) ΛΑΘΟΣ, δ) ΛΑΘΟΣ
ε) ΛΑΘΟΣ

<u>2ο ΘΕΜΑ</u>

Β1: Η f συνεχής στο 0: $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)$

$$\lim_{x\to0^+}(a\sqrt{x+1}-1)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x-6}{e^x+1}$$

$$a-1=\frac{1-6}{2}\Leftrightarrow\boxed{6=3-2a}\ (1)$$

Η εφαπτομένη για $x=3$ // $y=\frac{1}{4}x+2022$ οπότε $f'(3)=1/4$
Για $x>0$: $f(x)=a\sqrt{x+1}-1$ άρα $f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{x+1}}\overset{x=3}{\Longrightarrow}\dfrac{a}{4}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\boxed{a=1}$
$\overset{(1)}{\Longrightarrow}\boxed{6=1}$

Β2: Η f συνεχής στο 0 οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες
<u>Στο +∞</u>: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}=0=\lambda$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)\overset{\lambda=0}{=}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-1)=+\infty$$

οπότε δεν υπάρχει ασύμπτωτη στο +∞

<u>Στο −∞</u>: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

οπότε η $\boxed{y=-1}$ οριζόντια ασύμπτωτη στο −∞.

B_3: Για $x>0$: $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ οπότε $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

Για $x<0$: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ οπότε $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

Για $x=0$: • $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+1}-1-0}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}=\dfrac{1}{2}$

• $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{e^x-1}{e^x+1}-0}{x-0}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{xe^x+x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x}{e^x+xe^x+1}=\dfrac{1}{2}$

Άρα $f'(0)=1/2$

έτσι $f'(x)=\begin{cases}1/2\sqrt{x+1}, & x>0\\ 1/2, & x=0\\ \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}, & x<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}, & x\geq 0\\ \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}, & x<0\end{cases}$

B_4: Έστω $B(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη
$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-\sqrt{x_0+1}+1=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0+1}}(x-x_0)$

$\xrightarrow[\text{επαληθεύει}]{A(-2,-1)}$ $\cancel{-1}-\sqrt{x_0+1}\cancel{+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0+1}}(-2-x_0)$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{x_0+1}^{\,2}=-2-x_0 \Leftrightarrow -2x_0-2=-2-x_0$

$\Leftrightarrow \boxed{x_0=0}$

Εφ: $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-0=\frac{1}{2}x \Leftrightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x}$

3º ΘΕΜΑ

Γ1: Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lambda_{\varepsilon\varphi} = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow g'(0)=1$

• $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{1}{1-x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{x}{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1-x} = 1$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\eta\mu x-1}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

Άρα $g'(0)=1$

Γ2: Από υπόθεση $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} \geq 2$ (1)

• $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \left[\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\right] = A$

▶ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

▶ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} \underset{\substack{\text{Για } h\to 0 \\ \text{το } u\to 0}}{\overset{u=-h}{=\!=\!=}} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{-u} = -f'(x_0)$

οπότε $A = 2f'(x_0) \overset{(1)}{\Longrightarrow}$ Ισχύει $2f'(x_0) \geq 2 \Leftrightarrow f'(x_0) \geq 1$

και αφού ισχύει για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$: $f'(x) \geq 1 \Rightarrow f \nearrow$

Γ3: Για την δεδομένη χρονική στιγμή (που περνάει από το Β)

έχουμε: $x(t_0)=-2$, $y(t_0)=1/3$ και $y'(t_0)=-3$

Το ζητούμενο είναι το $x'(t_0)$

Για $x<0$: $g(x)=\dfrac{1}{1-x}$ συνεπώς $y(t)=\dfrac{1}{1-x(t)} \Longleftrightarrow x(t) = 1-\dfrac{1}{y(t)}$

Με παραγώγιση: $x'(t) = \dfrac{y'(t)}{y^2(t)} \overset{t=t_0}{\Longrightarrow} x'(t_0) = \dfrac{y'(t_0)}{y^2(t_0)} = \dfrac{-3}{1/9} = -27$

$\Longleftrightarrow \boxed{x'(t_0) = -27 \text{ μον/δευτ}}$

Γ4: Αν $K(x_1, f(x_1))$ και $Λ(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα με κοινή εφαπτομένη έχουμε:

$$Εφ_f: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow \boxed{y = f'(x_1)x + f(x_1) - x_1 f'(x_1)}$$

$$Εφ_g: y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow \boxed{y = g'(x_2)x + g(x_2) - x_2 g'(x_2)}$$

Άρα πρέπει $\begin{cases} \boxed{f'(x_1) = g'(x_2)} \quad (2) \\ \text{και} \\ \boxed{f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2)} \quad (3) \end{cases}$

Αν $x<0$: $g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ άρα πρέπει (απο (2)) $f'(x_1) = \dfrac{1}{(1-x_2)^2}$

όμως απο το Γ2 $f'(x) \geq 1 \xRightarrow{x=x_1} f'(x_1) \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(1-x_2)^2} \geq 1$

$\Leftrightarrow (1-x_2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |1-x_2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1 - x_2 \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 \leq -x_2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x_2 \leq 2$ Απορ. αφού $x<0$

Αν $x \in [0, π]$: $g'(x) = συνx$ (έχουμε αποδ. ότι $g'(0) = 1$ (Γ1))

αντίστοιχα $f'(x) \geq 1 \xRightarrow{x=x_1} f'(x_1) \geq 1 \xRightarrow{(2)} g'(x_2) \geq 1$ $\xRightarrow{(2)} \boxed{f'(x_1) = 1}$

$\Leftrightarrow συνx_2 \geq 1$ Άρα $συνx_2 = 1$ δηλ. $\boxed{g'(x_2) = 1}$

τότε $ημx_2 = 0$ άρα $g(x_2) = 1 + ημx_2 \Leftrightarrow \boxed{g(x_2) = 1}$

έτσι αρκεί να αποδείξουμε ότι η σχέση (3) παρουσιάζει λύση

$$(3) \xRightarrow[g(x_2)=1]{g'(x_2)=1} f(x_1) - x_1 \cdot 1 = 1 - x_2$$

και αφού $ημx_2 = 0$ και $συνx_2 = 1 \xRightarrow{x_2 \in [0, π]} x_2 = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Αρκεί να υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$: $f(x_1) - x_1 = 1$

Έστω $M(x) = f(x) - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

- Η $M(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών
- $M(0) = f(0) - 1 = -1 < 0$
  $M(1) = f(1) - 2 = 1 > 0$ $\Big\}$ $M(0)M(1) < 0$

Οπότε από Θ Bolzano $\exists\, x_1 \in (0,1)$: $M(x_1) = 0$
και οπότε υπάρχει 1 τουλ. κοινή εφαπτομένη.

4ο ΘΕΜΑ

Δ_1: $l(x) = e^x + x$ τότε $l'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow l(x) \uparrow \Rightarrow l(x)$ "1-1"

- αφού $y = \frac{1}{e} + 1$ οριζόντια εφαπτομένη στο $A(e, h(e))$ την επαληθεύει άρα $\boxed{h(e) = \frac{1}{e} + 1}$

- αφού $y = 1 - e$ οριζόντια ασύμπτωτη της $k(x) = h\left(\frac{e+x}{ex}\right)$ στο $+\infty$

θα ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = 1 - e$

$\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h\left(\frac{e+x}{ex}\right)$

Αν $u = \frac{e+x}{ex}$ τότε $u \to u_0$ όπου $u_0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e+x}{e \cdot x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{e \cdot \cancel{x}} = \frac{1}{e}$

Άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = \lim\limits_{u \to \frac{1}{e}} h(u) \overset{h \text{ συνεχής}}{=} h(1/e)$

και οπότε $\boxed{h(1/e) = 1 - e}$

Δ_2: Ισχύει $e^{h^2(x) - 2h(x)} - e^{\frac{\ln^2 x - x^2}{x^2}} = \frac{\ln^2 x}{x^2} - (h(x) - 1)^2$

$\Leftrightarrow e^{h^2(x) - 2h(x)} + h^2(x) - 2h(x) = e^{\frac{\ln^2 x - x^2}{x^2}} + \frac{\ln^2 x}{x^2} - 1$

$\xLeftrightarrow{l(x) = e^x + x}$ $l\left(h^2(x) - 2h(x)\right) = l\left(\frac{\ln^2 x}{x^2} - 1\right)$

$\xLeftrightarrow{l \text{ "1-1"}}$ $h^2(x) - 2h(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2} - 1 \Leftrightarrow (h(x) - 1)^2 = \frac{\ln^2 x}{x^2}$

$\Leftrightarrow |h(x)-1| = \left|\frac{\ln x}{x}\right|$

έστω $g(x)=h(x)-1$, συνεχής στο $(0,+\infty)$

τότε $|g(x)| = \frac{|\ln x|}{x}$ (*)

Αν $g(x)=0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{|\ln x|}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x=1$

άρα στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$ η $g(x)$ συνεχής και διάφορη του μηδενός οπότε έχει σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από αυτά.

$g(\frac{1}{e}) = h(\frac{1}{e})-1 = 1-e-1 = -e < 0$ άρα $g(x)<0$ στο $(0,1)$

$g(e) = h(e)-1 = 1+\frac{1}{e}-1 = \frac{1}{e} > 0$ άρα $g(x)>0$ στο $(1,+\infty)$

• Για $x \in (0,1) \xrightarrow[g(x)<0]{(*)} -g(x) = -\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow h(x)-1 = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow h(x) = \frac{\ln x}{x}+1$

• Για $x \in [1,+\infty) \xrightarrow[g(x)\geq 0]{(*)} g(x) = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow h(x) = \frac{\ln x}{x}+1$

Συνεπώς $\boxed{h(x) = \frac{\ln x}{x}+1}$

Δ3: $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

Για $x \in [e,+\infty) \Rightarrow h'(x) \leq 0 \Rightarrow h(x) \downarrow$: $h([e,+\infty)) = (\lim_{x\to+\infty} h(x), h(e)]$

• $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

οπότε $h([e,+\infty)) = (0, \frac{1}{e}+1]$

Για $x \in (0,e] \Rightarrow h'(x) \geq 0 \Rightarrow h(x) \uparrow$: $h((0,e]) = (\lim_{x\to0^+} h(x), h(e)]$

• $\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+} (\ln x \cdot \frac{1}{x} + 1) = -\infty$

οπότε $h((0,e]) = (-\infty, \frac{1}{e}+1]$

Δ4: <u>Α τρόπος</u>: Έστω $f(x)=\ln x+x,\ x>0$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1>0 \\ f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}-1<0 \end{array}\right\rangle f(1)f(1/e)<0$$

η f συνεχής στο $[\frac{1}{e},1]$ ως πράξεις συνεχών

από Θ.Bolzano $\exists\, x_0\in(\frac{1}{e},1)$: $f(x_0)=0$

$f'(x)=\frac{1}{x}+1>0 \Rightarrow f \nearrow \Rightarrow$ η ρίζα μοναδική.

<u>Β τρόπος</u>:

$\ln x+x=0 \Leftrightarrow \ln x=-x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}=-1 \Leftrightarrow h(x)=0$

Το $0\in h((0,e])$ και $0\notin h([e,+\infty))$

οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,e)$: $h(x_0)=0$

(αφού $h \nearrow (0,e]$)

Δ5:

$$e\cdot\xi^{\frac{3}{\xi}}=\kappa^{\frac{1}{\kappa}}\cdot\lambda^{\frac{1}{\lambda}} \Leftrightarrow \ln\left(e\cdot\xi^{\frac{3}{\xi}}\right)=\ln\left(\kappa^{\frac{1}{\kappa}}\cdot\lambda^{\frac{1}{\lambda}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln e+\ln\xi^{\frac{3}{\xi}}=\ln\kappa^{\frac{1}{\kappa}}+\ln\lambda^{\frac{1}{\lambda}} \Leftrightarrow 1+\frac{3}{\xi}\ln\xi=\frac{1}{\kappa}\ln\kappa+\frac{1}{\lambda}\ln\lambda$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{\ln\xi}{\xi}+3=\frac{\ln\kappa}{\kappa}+1+\frac{\ln\lambda}{\lambda}+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3h(\xi)=h(\kappa)+h(\lambda) \xLeftrightarrow{h(x_0)=0\ (\Delta 4)}$$

$$\Leftrightarrow h(\xi)=\frac{h(\kappa)+h(\lambda)+h(x_0)}{3}$$

Η h συνεχής στο $[\frac{1}{e},1]$ οπου $h\nearrow$

$$\frac{1}{e}\le x\le 1 \xLeftrightarrow{h\nearrow} h(\tfrac{1}{e})\le h(x)\le h(1) \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1)\xRightarrow{x=\kappa} h(\frac{1}{e})\le h(\kappa)\le h(1) \\ (1)\xRightarrow{x=\lambda} h(\frac{1}{e})\le h(\lambda)\le h(1) \\ (1)\xRightarrow[x_0\in(\frac{1}{e},1)]{x=x_0} h(1/e)<h(x_0)<h(1) \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \xRightarrow{(+)} 3h(\frac{1}{e})<h(\kappa)+h(\lambda)+h(x_0)<3h(1) \\ \Leftrightarrow h(\frac{1}{e})<\frac{h(\kappa)+h(\lambda)+h(x_0)}{3}<h(1) \end{array}$$

Από Θ.Ε.Τ. $\exists\,\xi\in(\frac{1}{e},1)$: $h(\xi)=\frac{h(\kappa)+h(\lambda)+h(x_0)}{3}$