1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 26 /11/2022

Θέμα Α

Α1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Α2. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

β) Να δώσετε τον ορισμό της εξίσωσης εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $A\left(x_0, f(x_0)\right)$.

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

« Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α** αν είναι αληθής , ή το γράμμα **Ψ** , αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήστε την απάντηση σας στο ερώτημα **α)**.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η f παρουσιάζει ρίζα στο (α, β) και είναι συνεχής στο [α, β] τότε θα ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

β) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f δεν μπορεί να έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f.

γ) Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά τότε ισχύει $u(t) > 0$.

δ) Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο ℝ τότε ορίζεται εφαπτομένη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

ε) Το σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης σε ένα διάστημα Δ αντιστοιχεί πάντα σε διάστημα.

Μονάδες : 5 – 6 – 4 – 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+1} - 1\,, x \geq 0 \\ \frac{e^x - \beta}{e^x + 1}\,, x < 0 \end{cases}$
- Η εφαπτομένη της C_f στο $A(3, f(3))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{1}{4}x + 2022$

B1 *Να αποδείξετε ότι* α = β = 1.

B2 *Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης* f.

B3 *Να αποδείξετε ότι* $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} & ,x \geq 0 \\ \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} & ,x < 0 \end{cases}$.

B4 *Να βρείτε την εφαπτομένη της* $f(x) = \sqrt{x+1} - 1, x \geq 0$ *που διέρχεται από το σημείο* $A(-2,-1)$.

Μονάδες : 7 – 6 – 6 – 6

Θέμα Γ

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:

- Η f παραγωγίσιμη και για κάθε πραγματικό αριθμό x_0 ισχύει: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} \geq 2$,
- $f(0) = 0 \; και \; f(1) = 3$,
- $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & ,x < 0 \\ 1 + ημx & ,0 \leq x \leq π \end{cases}$.

Γ1 *Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο A(0,1) σχηματίζει με τον x'x γωνία $ω = π/4$.*

Γ2 *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.*

Γ3 *Αν ένα κινητό κινείται κατά μήκος της C_g για $x < 0$ και καθώς περνάει από το σημείο $B(-2,\frac{1}{3})$ η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες ανά δευτερόλεπτο τότε να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x την χρονική στιγμή που περνάει από το B.*

Γ4 *Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία κοινή εφαπτομένη των συναρτήσεων f, g.*

Μονάδες : 6 – 6+1 – 6 – 6

Θέμα Δ

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $h : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύουν :

- $e^{h^2(x)-2h(x)} - e^{\frac{ln^2x-x^2}{x^2}} = \frac{ln^2x}{x^2} - (h(x)-1)^2 \;, για\; χ > 0$
- *Η ευθεία* $y = \frac{1}{e} + 1$ *αποτελεί οριζόντια εφαπτομένη της* C_h *στο σημείο* $A(e, h(e))$.
- *Η ευθεία* $y = 1 - e$ *αποτελεί οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης* $k(x) = h(\frac{e+x}{ex})$ *στο* $+\infty$.

Δ1 *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $l(x) = e^x + x,\; x \in \mathbb{R}$ είναι 1-1 συνάρτηση και ότι $h(e) = 1 + \frac{1}{e},\; h\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e$.*

1. 🖂 Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. 🖂 Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

Δ2 *Να αποδείξετε ότι* $h(x) = \frac{lnx}{x} + 1$.

Δ3 *Να υπολογίσετε τα επιμέρους σύνολα τιμών:* $h\big([e, +\infty)\big)$ *και* $h\big((0, e]\big)$.

Δ4 *Να αποδείξετε ότι η εξίσωση* $lnx + x = 0$ *έχει μοναδική ρίζα.*

Δ5 *Να αποδείξετε ότι για κάθε* $\kappa, \lambda \epsilon \left[\frac{1}{e}, 1\right]$ *θα υπάρχει* $\xi \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) : e \cdot \xi^{\frac{3}{\xi}} = \kappa^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \lambda^{\frac{1}{\lambda}}$.

Μονάδες : 2+4 – 6 – 4 – 4 – 5