ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
22-10-2022

ΘΕΜΑ Α

$\boxed{A4}$ α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$\boxed{B1}$ α) $f'(x) = e^x + 3x^2 + 3\eta\mu x + \frac{1}{x^2}$

β) $f'(x) = \ln x + 1$

γ) $f'(x) = \frac{x+1-x+2}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$

δ) $f'(x) = 6\cdot\sigma\upsilon\nu(3x)\cdot\eta\mu(3x)$

ε) $f'(x) = 3e^{3x+1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

$\boxed{B2}$ ▸ $x^2+1 \neq 0$ άρα $g^2 \neq 0$ οπότε $g \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

άρα η g ΕΠΕΙΔΗ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΗΣ ΔΙΑΤΗΡΕΙ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

οπότε $g>0$ ή $g<0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ΚΑΙ ΕΦΟΣΟΝ $g(0) = 1 > 0$

ΤΟΤΕ $g(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

• $g^2(x) = x^2+1 \Leftrightarrow |g(x)| = \sqrt{x^2+1} \overset{g>0}{\Leftrightarrow} g(x) = \sqrt{x^2+1}$

Scanned with CamScanner

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Για $\boxed{x<0}$: $f(x)=x^2+x+1$ παρ/μη ως πολ/κη με

$$f'(x)=2x+1$$

Για $0<x\leq\pi$: $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$ παρ/μη ως τριγωνομετρική με

$$f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+2-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)$$

$$=1-0=1$$

άρα $f'(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0\\ \sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x, & 0\leq x\leq\pi\end{cases}$

Γ2 Για $x<0$: $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Για $x\in[0,\pi]$: $f'(x)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu x$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4}$

, $0\leq\kappa\pi-\frac{\pi}{4}\leq\pi\Leftrightarrow 0\leq\kappa-\frac{1}{4}<1\Leftrightarrow\frac{1}{4}\leq\kappa\leq 1+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{4}\leq\kappa\leq\frac{5}{4}$ άρα $\kappa=1$

οπότε $x=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

x	0		$3\pi/4$		π
x_0		0		π	
$f'(x_0)$		1	0	-1	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$ $-1/2$	0 $3\pi/4$	π
$2x+1$	$-$ 0 $+$		
$\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$		$+$ 0 $-$	
$f'(x)$	$-$ 0 $+$	$+$ 0 $-$	

Γ3 Θεωρω $h(x) = (x-3)f'(\beta) + (x-2)f'(\alpha)$

- h συνεχης στο $[2,3]$ ως πολ/κη
- $h(2) = -f'(\beta) < 0$ αφου $f'(\beta) > 0$
- $h(3) = f'(\alpha) > 0$

αρα $h(2)h(3) < 0$ απο Θ. Bolzano

Γ4 $g(g(x)) = \frac{\pi}{4}(2 - f(x)) = \frac{\pi}{4}(2 - \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 2)$

$\Leftrightarrow g(g(x)) = \frac{\pi}{4}(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

α) Εστω $x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ με $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow$

$g(g(x_1)) = g(g(x_2)) \Rightarrow \frac{\pi}{4}(\sigma\upsilon\nu x_1 - \eta\mu x_1) = \frac{\pi}{4}(\sigma\upsilon\nu x_2 - \eta\mu x_2)$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 - \eta\mu x_1 = \sigma\upsilon\nu x_2 - \eta\mu x_2 \overset{*}{\Leftrightarrow} K(x_1) = K(x_2) \Leftrightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

* Θεωρω, $K(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$K'(x) = -\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x < 0$ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ αρα $K \downarrow$ στο $[0, \frac{\pi}{4}]$

οποτε K 1-1

β) Θεωρω, $w(x) = g(g(x)) - x = \frac{\pi}{4}(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) - x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

συνεχης ως πραξεις συνεχων

- $w(0) = \pi/4 > 0$ $w(\pi/4) = -\frac{\pi}{4} < 0$ αρα $w(0)w(\frac{\pi}{4}) < 0$
- $w'(x) = -\frac{\pi}{4}(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) - 1 < 0$ αρα $w \downarrow$ στο $[0, \pi/4]$ Θ. Bolzano ...

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 f γν. μονότονη άρα κ' 1-1

Έστω $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$: $f\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) > f(|x|) \overset{f\uparrow}{\iff}$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right) > |x| \iff \eta\mu x > |x|$ άτοπο άρα $f \downarrow$ στο $\mathbb{R}$

Δ2 α) Θεωρώ $g(x) = e^x - 1 + x$, $x \in \mathbb{R}$

- Προφανής ρίζα: $g(0) = 0$
- $g'(x) = e^x + 1 > 0$ άρα $g \uparrow$ οπότε $g(x) = 0 \iff \boxed{x=0}$

β) Είναι: $f(2e^x - 1) + f(1-2x) = 0$

Για $x=0$: $f(2-1) + f(1) = 0 \iff f(1) + f(1) = 0$

$\iff 2f(1) = 0 \iff f(1) = 0$

- $f(2 - f^{-1}(x^2-4)) > f(1) \overset{f\downarrow}{\iff} 2 - f^{-1}(x^2-4) < 1 \iff$

$\iff -f^{-1}(x^2-4) < -1 \iff f^{-1}(x^2-4) > 1 \overset{f\downarrow}{\iff} x^2 - 4 < f(1)$

$\iff x^2 - 4 < 0 \iff -2 < x < 2$

Δ3 • $e^{x^3} - 1 > 0 \iff e^{x^3} > 1 \iff x^3 > 0 \iff x > 0$

• $f(x+1) > 0 \iff f(x+1) > f(1) \overset{f\downarrow}{\iff} x+1 < 1 \iff x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^{x^3}-1$	$-$	0	$+$
$f(x+1)$	$+$	0	$-$
Γιν.	$-$	‖	$-$

άρα $\dfrac{f(x+1)}{e^{x^3}-1} < 0 \quad \forall x \neq 0$

$\boxed{\Delta 4}$ f συνεχής κ' $\downarrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}$

άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$\left|\frac{\eta \mu x}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\underbrace{\frac{1}{|f(x)|}}_{\downarrow \atop 0} \leq \underbrace{\frac{\eta\mu x}{f(x)}}_{\downarrow \text{ Κ.Π} \atop 0} \leq \underbrace{\frac{1}{|f(x)|}}_{\downarrow \atop 0}$$

$\boxed{\Delta 5}$. ΠΡΟΦΑΝΗΣ ΡΙΖΑ: $x = 0$

$$f(0) + f(0) = f(0) + f(0)$$

• Για $\boxed{x>0}$: $\begin{cases} ex < \pi x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(ex) > f(\pi x) \\ 5x < 10x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(5x) > f(10x) \quad + \end{cases}$

άρα $f(ex) + f(5x) > f(\pi x) + f(10x)$, $\forall x>0$

• Για $\boxed{x<0}$: $\begin{cases} ex > \pi x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(ex) < f(\pi x) \\ 5x > 10x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(5x) < f(10x) \quad + \end{cases}$

άρα $f(ex) + f(5x) < f(\pi x) + f(10x)$, $\forall x<0$

Τελικά ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ $\boxed{x=0}$