1. ✉ **Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1**
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ **Φανερωμένης 13**
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 22/10/2022

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Α3. Πότε μια συνάρτηση καλείται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας ,τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο (α,β), τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή.
β) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές της ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
γ) Η εικόνα $f(\Delta)$, ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα .

δ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η f' είναι συνεχής στο x_0.
ε) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

Μονάδες 7 – 4 – 4 – 10

Θέμα Β

Β1. Να βρείτε την $f'(x)$ στις παρακάτω συναρτήσεις :

α) $f(x) = e^x + x^3 - 3\text{συν}x - \frac{1}{x} - 1$, $x \neq 0$
β) $f(x) = x \cdot \ln x$, $x > 0$
γ) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$, $x \neq -1$
δ) $f(x) = \eta\mu^2(3x)$
ε) $f(x) = e^{3x+1} + \sqrt{x^2+3}$

Β2. Έστω $g(x)$ συνεχής συνάρτηση στο R με $g^2(x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in R$ με $g(0) = 1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάντησης g .

Μονάδες 20 – 5

1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 \ , & x < 0 \\ \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 2 \ , & 0 \le x \le \pi \end{cases}$

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγισιμη στο (-∞,π] , με :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 \ , & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \ , & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Γ2. Να βρείτε τον πρόσημο της $f'(x)$ στο (-∞,π].

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f'(\alpha)}{x-3} + \frac{f'(\beta)}{x-2} = 0$, $\alpha, \beta \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, εχει μια τουλαχιστον ριζα στο (2,3).

Γ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g : [0, \frac{\pi}{4}] \to R$, για την οποία ισχύει :

$$g\big(g(x)\big) = \frac{\pi}{4}(2 - f(x)) \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1 στο $[0, \frac{\pi}{4}]$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$ τέτοιο ώστε $g(g(\xi)) = \xi$.

Μονάδες 7 – 4 – 4 – 10

Θέμα Δ

Έστω $f : R \to R$ συνεχής και γνησίως μονότονη με $f(R) = R$

Ισχύουν :

- $f\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) > f(|x|)$, $x \ne 0$
- $f(2e^x - 1) + f(1 - 2x) = 0$, $x \in [0,1)$

Δ1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Δ2. α) Να λυθεί η εξίσωση $e^x - 1 + x = 0$.

β) Να λυθεί η ανίσωση $f(2 - f^{-1}(x^2 - 4)) > 0$.

Δ3. Να δείξετε ότι $\frac{f(x+1)}{e^{x^3} - 1} < 0$, για κάθε $x \ne 0$.

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$.

Δ5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(ex) + f(5x) = f(\pi x) + f(10x)$ έχει μοναδική λύση και να την υπολογίσετε.

Μονάδες 4 – 6 – 4 – 4 – 7