ΛΥΣΕΙΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Σχολικό βιβλίο σελ. 186)

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x)=\left(F(x)+c\right)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

Α2. (Σχολικό βιβλίο σελ. 142)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:
$f'(x_0)=0$

Α3. (Σχολικό βιβλίο σελ. 161)

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Α4. α) Σωστό (σελ. 67) β) Σωστό (σελ. 128) γ) Σωστό (σελ. 114)
δ) Λάθος (σελ. 53) ε) Λάθος (σελ. 214)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για το πεδίο ορισμού της παράστασης $f\circ g$ είναι:

$$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} = \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x\geq 0 \\ x\leq 1 \end{cases} = [0,1]\neq\varnothing$$

άρα ορίζεται η συνάρτηση $f\circ g$ και $D_{f\circ g}=[0,1]$.

Είναι $f(x)=x^4-2x^2+1=\left(x^2-1\right)^2$, οπότε ο τύπος της $f\circ g$ είναι:

$$(f\circ g)(x)=\left(\sqrt{x}^2-1\right)^2=(x-1)^2,\ x\in[0,1].$$

Β2. Για $x \in (0,1)$ είναι:

$$h'(x) = 2(x-1) < 0$$

και η h είναι και συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ άρα και 1 – 1, οπότε αντιστρέφεται.
Η h έχει σύνολο τιμών το

$$h([0,1]) = [h(1), h(0)] = [0,1] .$$

Για $x, y \in [0,1]$ έχουμε:

$$h(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{y} \Leftrightarrow -x+1 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{y} .$$

Άρα,

$$h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x},\ x \in [0,1].$$

Β3. i) Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και επειδή

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = 1 = \varphi(0)$$

είναι συνεχής και στο διάστημα $[0,1)$. Επίσης,

$$\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1) .$$

Οπότε η φ είναι συνεχής και στο 1 άρα είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Τέλος, $\varphi(0) = 1$ και $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ άρα $\varphi(0) \neq \varphi(1)$ συνεπώς για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα $[0,1]$.

ii) Η συνάρτηση $y = ημx$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε θα ισχύει:

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ημ\frac{\pi}{6} < ημ\alpha < ημ\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < ημ\alpha < 1$$

Εφόσον λοιπόν ισχύει $\varphi(1) < ημ\alpha < \varphi(0)$ και η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα $[0,1]$ τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = ημ\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x < -1$ έχουμε:

$$f'(x) = -2 \Leftrightarrow f'(x) = (-2x)'$$

κι επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι και στο $(-\infty,-1)$, οπότε υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x) = -2x + c_1, x < -1 .$$

Για κάθε $x > -1$ έχουμε:

$$f'(x)=3x^2-1 \Leftrightarrow f'(x)=\left(x^3-x\right)'$$

κι επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι και στο $(-1,+\infty)$, οπότε υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x)=x^3-x+c_2, x>-1.$$

Η C_f διέρχεται από $O(0,0)$ άρα

$$f(0)=0 \Leftrightarrow 0^3-0+c_2=0 \Leftrightarrow c_2=0.$$

Επομένως,

$$f(x)=\begin{cases}-2x+c_1, x<-1\\ x^3-x, \quad x>-1\end{cases}$$

Επίσης, η f είναι συνεχής $\mathbb{R}$ άρα και στο -1 οπότε

$$f(-1)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow f(-1)=2+c_1=0$$

άρα

$$f(-1)=0 \text{ και } c_1=-2$$

και

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2, x\le -1\\ x^3-x, \quad x>-1\end{cases}.$$

Γ2. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0>-1$ έχει εξίσωση

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2 όταν και μόνο όταν:

$$-2-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0) \Leftrightarrow -2-\left(x_0^3-x_0\right)=\left(3x_0^2-1\right)(-x_0) \Leftrightarrow x_0^3=1 \Leftrightarrow x_0=1$$

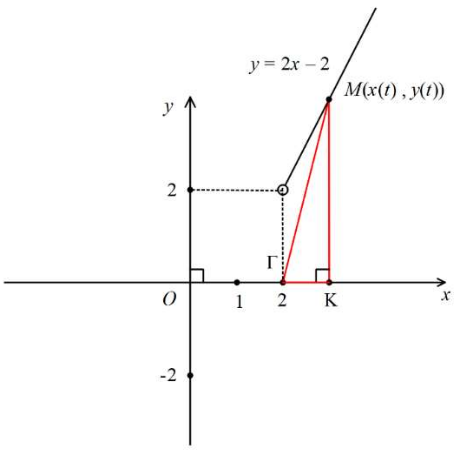
Επομένως,

$$f(1)=0,\ f'(1)=2$$

και η εξίσωση είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=2x-2.$$

Γ3. Σε χρόνο t έχουμε το σημείο $M(x(t),y(t))$ για το οποίο ισχύει ότι $y(t)=2x(t)-2$ με $x(t)>2$ και για τη χρονική στιγμή t_o που διέρχεται από το σημείο $B(3,4)$ είναι $x(t_0)=3$, $y(t_0)=4$. Ακόμη έχουμε $x'(t_0)=2$ μον/s.



Το τρίγωνο ΓΚΜ είναι ορθογώνιο στο $K(x(t),0)$ με $\Gamma(2,0)$, επομένως το εμβαδόν του σε χρόνο t είναι,

$$E(t)=\frac{1}{2}K\Gamma\cdot MK=\frac{1}{2}(x(t)-2)y(t)$$
$$=\frac{1}{2}(x(t)-2)(2x(t)-2)$$
$$=x^2(t)-3x(t)+2$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού σε χρόνο t, είναι

$$E'(t)=2x(t)x'(t)-3x'(t)$$

και σε χρόνο t_0 είναι

$$E'(t_0)=2x(t_0)x'(t_0)-3x'(t_0)=2\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2=6 \text{ τ.μον}/s .$$

Γ4. Για $x<-1$ είναι, $f(x)=-2x-2$ οπότε

το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=0$ και $f(x)>0$

Για $x<-1$ είναι,

$$\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right|=\frac{|\eta\mu f(x)|}{|f(x)|}\le\frac{1}{f(x)}\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}\le\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\le\frac{1}{f(x)}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{f(x)}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=0$, άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0 .$$

Ακόμη,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}\underset{u_0=+\infty}{\overset{-x=u}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1+u^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{1+u^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3}=1$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}=0+1=1 .$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Η f είναι παραγωγίσιμη, με παράγωγο:

$$f'(x)=(x-\ln(3x))'=1-\frac{1}{3x}\cdot(3x)'=1-\frac{3}{3x}=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

Πίνακας μεταβολών

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ άρα

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x-\ln(3x))=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x-\ln(3x)) = 1-\ln 3 = \ln e - \ln 3 < 0,\ \text{διότι } e \simeq 2{,}7<3.$$

Άρα

$$f((0,1]) = \left[\ln\frac{e}{3}, +\infty\right)$$

και επειδή $0 \in f((0,1])$ και $f \searrow$ στο $(0,1]$, η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μοναδική λύση $x_1 \in (0,1]$.

Επίσης, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ άρα

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-\ln(3x)) = \ln\frac{e}{3} < 0$$

και

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(x-\ln(3x)) = \lim_{x\to +\infty}(\ln e^x - \ln(3x)) = \lim_{x\to +\infty}\left(\ln\frac{e^x}{3x}\right)$$

Θέτουμε: $u = \dfrac{e^x}{3x}$ οπότε $\lim\limits_{x\to +\infty} u = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{3x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(e^x)'}{(3x)'} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{3} = +\infty$.

Τελικά,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{u\to +\infty}(\ln u) = +\infty$$

Άρα,

$$f([1,+\infty)) = \left[\ln\frac{e}{3}, +\infty\right)$$

και επειδή $0 \in f([1,+\infty))$ και $f \nearrow$ στο $[1,+\infty)$, η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μοναδική λύση $x_2 \in [1,+\infty)$.

Συνεπώς, η εξίσωση $f(x)=0$, έχει ακριβώς δύο λύσεις x_1 , x_2 με $x_1 < 1 < x_2$.

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0 \text{ , για κάθε } x \in (0,+\infty),$$

άρα η f είναι κυρτή.

Δ2. Είναι $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$

διότι

$$x_1 \le x \le 1 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x_1) \ge f(x) \Rightarrow 0 \ge f(x)$$

και

$$1 \le x \le x_2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) \le f(x_2) \Rightarrow f(x) \le 0$$

άρα

$$E(\Omega) = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln 3x - x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (x)' \ln 3x\,dx - \int_{x_1}^{x_2} x\,dx$$

$$= [x\ln 3x]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} 1\,dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= x_2 \ln 3x_2 - x_2 \ln 3x_2 - (x_2 - x_1) - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2}$$

$$= x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2}$$

$$= \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} - (x_2 - x_1)$$

$$= (x_2 - x_1)\left(\frac{x_2}{2} + \frac{x_1}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

διότι από το Δ1 ερώτημα έχουμε:

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ln 3x_1 \text{ και } f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = \ln 3x_2$$

Δ3. Α΄ τρόπος

Γνωρίζουμε ότι,

$$x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$$

άρα θα αποδείξουμε ισοδύναμα ότι:

$$f(2 - x_1) < 0 \Leftrightarrow f(2 - x_1) < f(x_2) \underset{f \nearrow}{\overset{2-x_1, x_2 \in [1,+\infty)}{\Leftrightarrow}} 2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2 < x_1 + x_2$$

που ισχύει διότι:

$$E = \frac{x_2 - x_1}{2}(x_1 + x_2 - 2) > 0 \overset{x_2 > x_1}{\Rightarrow} x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2\,.$$

Β΄ τρόπος

Από ερώτημα Δ2 βρέθηκε το $E=\frac{x_2-x_1}{2}(x_1+x_2-2)$ που είναι προφανώς θετικός αριθμός.

Έτσι:

$$E=\frac{x_2-x_1}{2}(x_1+x_2-2)>0\overset{x_2>x_1}{\Rightarrow}x_1+x_2-2>0\Leftrightarrow x_1>2-x_2\Rightarrow 2-x_2<x_1\ (1)$$

Όμως,

$$x_1<2-x_1\Leftrightarrow 2x_1<2\Leftrightarrow x_1<1\ (2) \text{ που είναι αληθής.}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) :

$$x_1<2-x_1<x_2$$

συνεπώς η ποσότητα $2-x_1$ ανήκει σε διάστημα αρνητικών τιμών της f, άρα

$$f(2-x_1)<0\ .$$

Δ4. Παρατηρούμε ότι $f(1)=1-\ln 3$. Οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$2f(x)-f(1)=f'(x_2)(x-x_2)\quad(1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(x_2,f(x_2))$ είναι

$$y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2)$$

Από Δ1 έχουμε $f(x_2)=0$ οπότε η εξίσωση εφαπτομένης είναι

$$y=f'(x_2)(x-x_2)$$

Η f είναι κυρτή οπότε

$$f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow f'(x_2)(x-x_2)-f(x)\leq 0\quad(1)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_2$.

Επίσης από Δ1 έχουμε ότι το $f(1)$ είναι ολικό ελάχιστο της f, άρα

$$f(x)\geq f(1)\ (2).$$

Με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Συνεπώς από $(1),(2)$ η εξίσωση

$$2f(x)-f(1)=f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow f(x)-f(1)=f'(x_2)(x-x_2)-f(x)$$

είναι αδύνατη.