Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

A_3. 1. $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 2} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

$\lim_{x \to 5} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 5} \frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει γιατί $\begin{cases} \lim_{x \to 5^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty \quad f(x) > 0, \ \lim_{x \to 5^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 5^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty \quad f(x) < 0 \end{cases}$

2. $(0, 2]$ η $f \uparrow$ $[4, +\infty)$ $f \uparrow$

$[2, 4]$ η $f \downarrow$

A_4 1. Σ 2. Λ 3. Λ 4. Σ 5. Λ

Θ.Β.

$f(x) = 1 + \ln(x-1)$ κ' $g(x) = e^x$

$A_f = (1, +\infty)$ $A_g = \mathbb{R}$

B_1 $f \circ g$

$f(g(x))$ $\begin{matrix} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{matrix}$ $\begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ e^x > 1 \\ e^x > e^0 \\ x > 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{matrix}$

$A_{f \circ g} = (0, +\infty)$

$f(g(x)) = 1 + \ln(e^x - 1)$

B_2 $\varphi(x) = ?$ $\varphi(g(x)) = e^x + x - 1$ (1)

Θέτω $g(x) = u \Leftrightarrow e^x = u \Leftrightarrow x = \ln u$ (2) $u > 0$

Άρα από (1) κ' (2) $\varphi(u) = e^{\ln u} + \ln u - 1$

$\varphi(u) = u + \ln u - 1$

Άρα $\varphi(x) = x + \ln x - 1$ $x > 0$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

B_3. $x = ?$ $\quad \varphi(x) > x \iff$

$x + \ln x - 1 > x \iff$

$\ln x - 1 > 0 \iff$

$\ln x > 1 \iff$

$\ln x > \ln e \iff$

$x > e$

B_4. $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff$

$\varphi(x) = \ln x + x - 1 \iff$

$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\frac{1}{x} + \frac{1}{x} - 1 \iff$

$\cancel{\ln x} + x - 1 + \cancel{\ln\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} - 1 = 0 \iff$

$x + \frac{1}{x} - 2 = 0 \overset{x \neq 0}{\iff}$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \iff$

$(x-1)^2 = 0 \iff \boxed{x = 1}$

Θ.Γ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η C_f διερχ. απ' τα σημεία $A(2, 6)$ $B(4, 3)$

$f(2) = 6$ $\quad f(4) = 3$

Εφόσον f γν. μονοτονη

για $x_1 = 2 < x_2 = 4$

$f(2) > f(4)$

άρα η $f \searrow$

άρα $1-1$ άρα αντιστ.

Scanned with CamScanner

Παρατηρήσεις

Γ2. Έστω $x_1, x_2 \in f(A)$ με $x_1 < x_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow}$

$f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2)) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow}$

$f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$

άρα $f^{-1} \downarrow$

Γ3. $f(f^{-1}(6e^x + 3x^5) + 2) = 3.$

$$f(f^{-1}(6e^x+3x^5)+2) = f(4) \overset{f\ 1-1}{\Longleftrightarrow}$$

$$f^{-1}(6e^x+3x^5) + 2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(6e^x+3x^5) = 2 \Leftrightarrow$$

$$f(f^{-1}(6e^x+3x^5)) = f(2) \overset{f\ 1-1}{\Longleftrightarrow}$$

$$6e^x + 3x^5 = 6 \Leftrightarrow$$

$$6e^x + 3x^5 - 6 = 0$$

Θέτω $h(x) = 6e^x + 3x^5 - 6$ $\quad A_h = \mathbb{R}$

$h(0) = 0$

$h(x) \uparrow$ άρα η $x=0$ μοναδική.

Γ4. $f^{-1}(f(x^2-x)-3) < 4 \overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow}$

$$f(x^2-x) - 3 > f(4) \Leftrightarrow$$

$$f(x^2-x) - 3 > 3 \Leftrightarrow$$

$$f(x^2-x) > 6 \Leftrightarrow$$

$$f(x^2-x) > f(2) \overset{f\downarrow}{\Longleftrightarrow}$$

$$x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x+1) < 0$$

x		-1		2	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in (-1, 2)$

Παρατηρήσεις

Θ. Τ.

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x+t}+1}-e^{t}\right)=\frac{(x+1)}{2}\left[-(x-1)^8+f(x)\right] \quad (1)$$

$x\neq-1$ $\quad f(-1)=e^{-1}+2^8$

$$\Delta_1 \quad \lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x}\cdot e^{t}+1}-e^{t}\right)=$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\cancel{e^{2t}}+(x+1)e^{x}\cdot e^{t}+1-\cancel{e^{2t}}}{\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x}\cdot e^{t}+1}+e^{t}}=$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\cancel{e^{t}}\left[(x+1)e^{x}+\frac{1}{e^{t}}\right]}{\cancel{e^{t}}\left(\sqrt{1+(x+1)e^{x}\frac{1}{e^{t}}+\frac{1}{e^{2t}}}+1\right)}=$$

$$\frac{(x+1)e^{x}}{2} \quad (2)$$

Άρα από (1)

$x\neq-1$

$$\cancel{\frac{(x+1)}{2}}e^{x}=\cancel{\left(\frac{x+1}{2}\right)}\left[-(x-1)^8+f(x)\right]\Leftrightarrow$$

$$e^{x}=-(x-1)^8+f(x)\Leftrightarrow$$

$$f(x)=(x-1)^8+e^{x} \quad \text{για } x\neq-1$$

για $x=-1$ $\quad \lim_{x\to-1}\left[(x-1)^8+e^{x}\right]=(-1)^8+e^{-1}$

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^8+e^{x} & x\neq-1\\ (-1)^8+e^{-1} & x=-1\end{cases}$$

Παρατηρήσεις

Δ_2 $f(x^2+2) - f(|x|+4) < 0 \Leftrightarrow$

$f(x^2+2) < f(|x|+4) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$ (*)

$x^2+2 < |x|+4 \Leftrightarrow$

$|x|^2 - |x| - 2 < 0 \Leftrightarrow$

$(|x|-2)\cdot\underset{(+)}{(|x|+1)} < 0$

$|x|+1 > 0$

Άρα αρκεί $|x|-2<0 \Leftrightarrow$

$|x|<2 \Leftrightarrow$

$-2<x<2$

Εφόσον

$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+2 \geq 2 > 1$

$|x| \geq 0 \Leftrightarrow |x|+4 \geq 4 > 1$

στο $[1,+\infty)$

$f(x)=e^x+(x-1)^8$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $1<x_1<x_2$

$x_1-1 < x_2-1$

① $(x_1-1)^8 < (x_2-1)^8$

$x_1<x_2 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} e^{x_1}<e^{x_2}$ ②

① + ②

$e^{x_1}+(x_1-1)^8 < e^{x_2}+(x_2-1)^8$

$f(x_1)<f(x_2)$

(*) Άρα $f\uparrow$ στο $[1,+\infty)$

Δ_3. Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+e^{-x}+\eta\mu x)$$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[e^x+(x-1)^8\right] =$

$= \lim_{x\to-\infty}\left[e^x + x^8\left(1-\frac{1}{x}\right)^8\right] = 0+(+\infty) = +\infty$

γιατί → $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ • $\lim_{x\to-\infty} x^8 = +\infty$

→ $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$

• $\lim_{x\to-\infty}(e^{-x}+\eta\mu x) = +\infty$

$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$

$e^{-x}-1 \leq e^{-x}+\eta\mu x \leq 1+e^{-x}$

παρατηρήσεις

Εφόσον $e^{-x}-1 \leq e^{-x}+\eta\mu x$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}-1)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x}+\eta\mu x)=+\infty$

Δ4 i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^5(x)-3f^2(x)+4}{-2f^3(x)+f(x)+1}$ (3)

Θέτω $f(x)=u$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x+(x-1)^8\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x+x^8\left(1+\frac{1}{x}\right)^8\right]=+\infty$

Άρα $u\to+\infty$

Οπότε από (3)

$(3)=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^5-3u^2+4}{-2u^3+u+1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^5}{-2u^3}=$

$\lim\limits_{u\to+\infty}-\dfrac{u^2}{2}=-\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}=\lim\limits_{u\to0}\frac{1}{u}\eta\mu u=1$

γιατί: Θέτω $\frac{1}{f(x)}=u \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{u}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$, $u\to0$