Λύσεις διαγωνίσματος Άλγεβρας Α' Λυκείου (13-2-2022)

Α1: Σχολικό βιβλίο σελ. 90

Α2: Ψευδής διότι:

$|2x-1| = x-2$ πρέπει $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Άρα $2x-1 = x-2$ ή $2x-1 = -x+2$

$x = -1$ Απορρίπτεται $\quad 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$ Απορρίπτεται

Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη

Α3. Λ - Λ - Σ - Λ - Λ - Σ

Β1: $(\lambda^2-1)x = (\lambda+1)(\lambda+2)$

(α) Για $\lambda = 1 \quad 0x = 6$ Αδύνατη

$\lambda = -1 \quad 0x = 0$ Ταυτότητα

(β). Αν $\lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 1 \\ \text{και} \\ \lambda \neq -1 \end{cases}$

η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = \frac{\cancel{(\lambda+1)}(\lambda+2)}{(\lambda-1)\cancel{(\lambda+1)}} = \frac{\lambda+2}{\lambda-1}$

Β2.: (i) $4x^2 - 7x - 15 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 49 + 240 = 289 \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm 17}{8} < \begin{matrix} 3 \\ -\frac{5}{4} \end{matrix}$

(ii) $2x^5 + 16x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(x^3+8) = 0 < \begin{matrix} 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \text{ή} \\ x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|-8|} = -2. \end{matrix}$

(iii) $\frac{1}{x} + \frac{x^2+1}{x^2-x} = -\frac{x+3}{\cancel{1}-x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{x^2+1}{x(x-1)} = \frac{x+3}{x-1}$

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \neq 0$ και $x \neq 1$.

οπότε έχουμε. $\quad x - 1 + x^2 + 1 = (x+3) \cdot x \Leftrightarrow$

$x - 1 + \cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} - 3x = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Απορ.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη

Θέμα Γ

Γ1: (i) $2x^4+7x^2+3=0$

Θέτουμε $x^2=\omega\geq 0$

$2\omega^2+7\omega+3=0$ $\quad \Delta=49-24=25 \quad \omega_{1,2}=\frac{-7\pm 5}{4} \begin{cases} -\frac{1}{2} \text{ Απορ} \\ -3 \text{ Απορ} \end{cases}$

Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες

(ii) $x^2-8|x|+12=0$.

$|x|^2-8|x|+12=0$.

Θέτουμε $|x|=\omega\geq 0$

$\omega^2-8\omega+12=0 \quad \Delta=64-48=16 \quad \omega_{1,2}=\frac{8\pm 4}{2} \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$

Συνεπώς $|x|=6 \Leftrightarrow x=\pm 6$

$|x|=2 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

(iii) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

Η εξίσωση ορίζεται για $x\neq 0$

Θέτουμε $x+\frac{1}{x}=\omega$

Άρα $\omega^2-5\omega+6=0 \quad \Delta=1 \quad \omega_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

οπότε $x+\frac{1}{x}=3 \Leftrightarrow x^2+1=3x \Leftrightarrow$

$x^2-3x+1=0 \quad \Delta=5 \quad x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

και $x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x^2+1=2x$

$x^2-2x+1=0 \quad \Delta=0 \quad x_0=1$

Διπλή ρίζα

Γ2: $2x^2+5x-1=0$

$\Delta=25+8=33>0$ άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες.

από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{5}{2}$

$P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=-\frac{1}{2}$

Επίσης $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{4}+1=\frac{29}{4}$

Γ2(ii) Η εξίσωση με ρίζες $\rho_1 = \frac{1}{x_1}$ και $\rho_2 = \frac{1}{x_2}$ θα είναι η $x^2 - S'x + P' = 0$ όπου:

$$S' = \rho_1 + \rho_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = 5$$

και

$$P' = \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.$$

Άρα, η $x^2 - 5x - 2 = 0$

Γ3. $x^2 - (\alpha + \gamma)x + \alpha\gamma - \beta^2 = 0.$

$$\Delta = (\alpha+\gamma)^2 - 4\cdot(\alpha\gamma - \beta^2) = \alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2 - 4\alpha\gamma + 4\beta^2$$
$$= \alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2 + 4\beta^2$$
$$= (\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2 \geq 0.$$ έχει πάντα πραγματικές ρίζες

- Για $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma$ και $\beta = 0$ 1 διπλή ρίζα
- $\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \gamma$ ή $\beta \neq 0$ 2 ρίζες πραγματικές και άνισες.

Θέμα Δ.

Δ_1: $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ (1)

(i) $\Delta = 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 - \lambda + 2) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 4\lambda - 8.$

(ii) $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2}$

Η εξίσωση γίνεται $||x| - 1| = 2. \Leftrightarrow |x| - 1 = \pm 2.$

$|x| - 1 = 2 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$

$|x| - 1 = -2 \Leftrightarrow |x| = -1$ Αδύνατη

(iii) Για να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει:

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2$

Άρα, $A = |\lambda - 1| - |4 - 2\lambda| + \lambda = \lambda - 1 + 4 - 2\lambda + \lambda = 3.$

Δ_2: (i) $\alpha^{10} + \beta^6 + 65 = 2\alpha^5 - 16\beta^3 \Leftrightarrow \alpha^{10} - 2\alpha^5 + 1 + \beta^6 + 16\beta^3 + 64 = 0$

$(\alpha^5 - 1)^2 + (\beta^3 + 8)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^5 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ \text{και} \\ \beta^3 = -8 \Leftrightarrow \beta = -\sqrt[3]{|-8|} = -2. \end{cases}$

(ii) $(|-2x + 3| - 1)^4 = (2 + 6)^{4/3} \Leftrightarrow (|2x - 3| - 1)^4 = \sqrt[3]{8}^4 \Leftrightarrow$

$(|2x - 3| - 1)^4 = 2^4 \Leftrightarrow |2x - 3| - 1 = \pm 2.$

$|2x - 3| = 3 \Leftrightarrow (2x - 3 = 3$ ή $2x - 3 = -3) \Leftrightarrow \boxed{x = 3}$ ή $\boxed{x = 0}$

$|2x - 3| = -1$ Αδύνατη