Διαγώνισμα Άλγεβρας Β' Λυκείου

12-2-2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 135

Α2.

i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

ii) $a^x : a^y = a^{x-y}$

iii) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

iv) $(a^x)^y = a^{xy}$

v) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$

Α3.

i) Σ ii) Λ iii) Σ iv) Σ v) Λ

ΘΕΜΑ Β

i) $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $\eta\mu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu^2 x = 4 \Leftrightarrow$

$1 - \sigma\upsilon\nu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu^2 x = 4 \Leftrightarrow$

$4\sigma\upsilon\nu^2 x = 3 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$

2) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$

iii) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = -\eta\mu x \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \eta\mu(-x) \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right) \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \frac{\pi}{4}-x = 2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}+x \\ \text{ή} \\ \frac{\pi}{4}-x = 2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}-x \end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -2x = 2\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \\ \text{ή} \\ 0x = 2\kappa\pi-\frac{3\pi}{4} \\ \text{αδύνατη} \end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$x = -\kappa\pi-\frac{\pi}{8}, \kappa\in\mathbb{Z}$

iv) $\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3}+x\right) \Leftrightarrow$

$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3}+x\right) \Leftrightarrow$

$\frac{\pi}{2}-x = \kappa\pi+\frac{\pi}{3}+x, \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$3\pi-6x = 6\kappa\pi+2\pi+6x, \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$-12x = 6\kappa\pi-\pi, \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$x = -\frac{6\kappa\pi+\pi}{12}, \kappa\in\mathbb{Z}$ δεκτές

$x\in[0,2\pi) \Leftrightarrow$

$0\leq x<2\pi \Leftrightarrow$

$0\leq -\frac{6\kappa\pi+\pi}{12} < 2\pi, \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

• Περιορισμοί

πρέπει:

$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu x\neq 0 \\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{3}+x\neq\kappa\pi \end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \\ x\neq\kappa\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa\in\mathbb{Z}$

$0 \leq -6k\pi + \pi < 24\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$0 \leq -6k + 1 < 24,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$-1 \leq -6k < 23,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{6} \geq k > -\frac{23}{6},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$-\frac{23}{6} < k \leq \frac{1}{6},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$k = -3$ ή $k = -2$ ή $k = -1$ ή $k = 0$

1) $k = -3 \rightarrow x = \frac{19\pi}{12}$

2) $k = -2 \rightarrow x = \frac{13\pi}{12}$

3) $k = -1 \rightarrow x = \frac{7\pi}{12}$

4) $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{12}$

v) $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$

- Αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε από τη σχέση $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ προκύπτει ότι $\eta\mu x = 0$

Ισχύει:

$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

$0 + 0 = 1$

$0 = 1$ άτοπο

άρα $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$

$x \in [0, \pi] \Leftrightarrow$

$0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow$

$0 \leq k\pi + \frac{\pi}{4} \leq \pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$0 \leq k + \frac{1}{4} \leq 1,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$k = 0$

1) $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

1) Αν $k^3-9k\neq 0 \Leftrightarrow k(k^2-9)\neq 0 \Leftrightarrow k\neq 0$ και $k\neq \pm 3$, τότε το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $4^{ου}$ βαθμού

2) Αν $k^3-9k=0 \Leftrightarrow k(k^2-9)=0 \Leftrightarrow k=0$ ή $k=\pm 3$, τότε

- $k=0 \rightarrow P(x)=-3x-3$ άρα το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $1^{ου}$ βαθμού
- $k=3 \rightarrow P(x)=-9x^3-6x$ άρα το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού
- $k=-3 \rightarrow P(x)=-9x^3-6$ άρα το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού

Γ2. πρέπει

$$\begin{cases} a^3=8 \\ -a=-2 \\ -a+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=2 \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=2$$

Για $a=2$ έχουμε

$P(x)=8x^3-2x^2-x-5$

$P(x)=0 \Leftrightarrow$

$8x^3-2x^2-x-5=0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες = Διαιρέτες σταθερού όρου

Π.Α.Ρ $=\Delta_{-5}=\pm 1, \pm 5$

$$\begin{array}{cccc|l} 8 & -2 & -1 & -5 & \rho=1 \\ \downarrow & 8 & 6 & 5 & \\ 8 & 6 & 5 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x-1)(8x^2+6x+5)=0 \Leftrightarrow$

$x-1=0$ ή $\underset{\substack{\text{αδύνατη} \\ \Delta<0}}{8x^2+6x+5=0} \Leftrightarrow$

$\boxed{x=1}$

Scanned with CamScanner

Γ3.

$$
\begin{array}{r|l}
15x^3 - 14x^2 + 7x + 6 & 3x^2 - 4x + 3 \\ \cline{2-2}
-15x^3 + 20x^2 - 15x & 5x + 2 \\ \cline{1-1}
6x^2 - 8x + 6 & \\
-6x^2 + 8x - 6 & \\ \cline{1-1}
= 0 &
\end{array}
$$

Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης

$$15x^3 - 14x^2 + 7x + 6 = (3x^2 - 4x + 3)(5x + 2)$$

Γ4.

i) $x^3 + x - 10 = 0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες = Διαιρέτες σταθερού όρου

$Π.Α.Ρ = Δ_{-10} = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & 0 & 1 & -10 & ρ = 2 \\ \cline{5-5}
\downarrow & 2 & 4 & 10 & \\
1 & 2 & 5 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$(x-2)(x^2 + 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow$

$x - 2 = 0$ ή $x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow$ αδύνατη $Δ < 0$

$\boxed{x = 2}$

ii) $2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες = Διαιρέτες σταθερού όρου

Π.Α.Ρ $= \delta_{-6} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

2	−1	−7	6	ρ=1
↓	2	1	−6	
2	1	−6	$\boxed{0}$	

$(x-1)(2x^2+x-6) = 0 \Leftrightarrow$

$x-1=0$ ή $2x^2+x-6=0 \Leftrightarrow$

$\boxed{x=1}$ ή $\boxed{x=\frac{3}{2}}$ ή $\boxed{x=-2}$

iii) $x^6 + x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$x^6 + x^2 + 2x + 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^6 + 2 + (x+1)^2 = 0$

<u>αδύνατη</u> γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

- $x^6 + 2 > 0$
- $(x+1)^2 \geq 0$

άρα $x^6 + 2 + (x+1)^2 > 0, x \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

i) $\left(\sqrt[3]{9^{x+1}} - \sqrt{3^{5x-6}}\right)\left(e^{|x|-3} - \frac{1}{e}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt[3]{9^{x+1}} - \sqrt{3^{5x-6}} = 0$ ή $e^{|x|-3} - \frac{1}{e} = 0$

• Περιορισμοί πρέπει:

$\begin{cases} 9^{x+1} \geq 0 \\ 3^{5x-6} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

• $\sqrt[3]{9^{x+1}} - \sqrt{3^{5x-6}} = 0 \Leftrightarrow$

$9^{\frac{x+1}{3}} - 3^{\frac{5x-6}{2}} = 0 \Leftrightarrow$

$$9^{\frac{x+1}{3}} = 3^{\frac{5x-6}{2}} \Leftrightarrow$$

$$(3^2)^{\frac{x+1}{3}} = 3^{\frac{5x-6}{2}} \Leftrightarrow$$

$$3^{\frac{2x+2}{3}} = 3^{\frac{5x-6}{2}} \Leftrightarrow \quad 1-1$$

$$\frac{2x+2}{3} = \frac{5x-6}{2} \Leftrightarrow$$

$$2(2x+2) = 3(5x-6) \Leftrightarrow$$

$$4x+4 = 15x-18 \Leftrightarrow$$

$$4x-15x = -18-4 \Leftrightarrow$$

$$-11x = -22 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x=2}$$

- $$e^{|x|-3} - \frac{1}{e} = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{|x|-3} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$e^{|x|-3} = e^{-1} \Leftrightarrow \quad 1-1$$

$$|x|-3 = -1 \Leftrightarrow$$

$$|x| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x = \pm 2}$$

ii) $$8^x - 20\cdot 4^{x-1} - 7\cdot 2^{x+2} + 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2^3)^x - 20\cdot(2^2)^{x-1} - 7\cdot 2^{x+2} + 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2^x)^3 - 20\cdot 2^{2x-2} - 7\cdot 2^{x+2} + 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2^x)^3 - 20\cdot \frac{2^{2x}}{2^2} - 7\cdot 2^x\cdot 2^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2^x)^3 - 20\cdot \frac{(2^x)^2}{4} - 7\cdot 2^x\cdot 4 + 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2^x)^3 - 5\cdot(2^x)^2 - 28\cdot 2^x + 32 = 0$$

ii) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-x-6} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2+6x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-2x-12} \underset{0<\frac{1}{3}<1}{\Leftrightarrow}$

$3x^2+6x < 2x^2-2x-12 \Leftrightarrow$

$x^2+8x+12<0$

• $x^2+8x+12=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=-6$

•

x	$-\infty$		-6		-2		$+\infty$
$x^2+8x+12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in (-6,-2)$

Δ3.

i) $A(1,3) \in C_f \Leftrightarrow$

$f(1)=3 \Leftrightarrow$

$a \cdot 2^1 + b = 3 \Leftrightarrow$

$2a+b=3 \quad (1)$

$B(2,13) \in C_f \Leftrightarrow$

$f(2)=13 \Leftrightarrow$

$a \cdot 2^2 + b = 13 \Leftrightarrow$

$4a+b=13 \quad (2)$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2)

$\begin{cases} 2a+b=3 \\ 4a+b=13 \end{cases} \Bigg| \cdot(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-b=-3 \\ 4a+b=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ 10+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-7 \end{cases}$

$2a=10 \Leftrightarrow$

$a=5$

ii) $f(x)=5\cdot 2^x-7$

$D_f=\mathbb{R}$

• Σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$

$x=0 \rightarrow y=f(0)=5\cdot 2^0-7=5-7=-2.$

$\Gamma(0,-2)$

Θέτουμε $2^x = w > 0$

$w^3 - 5w^2 - 28w + 32 = 0$

Π.Α.Ρ $= \delta_{32} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$

1	−5	−28	32	ρ=1
↓	1	−4	−32	
1	−4	−32	$\boxed{0}$	

$(w-1)(w^2-4w-32) = 0 \Leftrightarrow$

$w-1=0$ ή $w^2-4w-32=0 \Leftrightarrow$

$w=1$ ή $w=8$ ή $w=-4$
απορρ

1) $w=1 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \boxed{x=0}$

2) $w=8 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \boxed{x=3}$

Δ2.

i) $9^{x+\frac{1}{2}} - 2\cdot 3^{x+2} \geq -27 \Leftrightarrow$

$(3^2)^{x+\frac{1}{2}} - 2\cdot 3^{x+2} \geq -27 \Leftrightarrow$

$3^{2x+1} - 2\cdot 3^{x+2} \geq -27 \Leftrightarrow$

$3^{2x}\cdot 3^1 - 2\cdot 3^x\cdot 3^2 + 27 \geq 0 \Leftrightarrow$

$3\cdot(3^x)^2 - 18\cdot 3^x + 27 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(3^x)^2 - 6\cdot 3^x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(3^x - 3)^2 \geq 0$, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) $f(2^x - 31) < 3 \iff$

$f(2^x - 31) < f(1) \overset{f \uparrow \mathbb{R}}{\iff}$

$2^x - 31 < 1 \iff$

$2^x < 32 \iff$

$2^x < 2^5 \overset{2>1,\ \uparrow}{\iff}$

$x < 5$