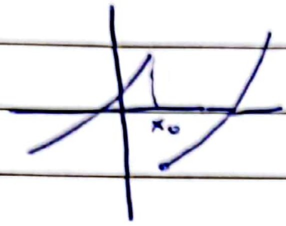
Παρατηρήσεις

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 19/9/22

**Α3)** Ψ Το Α δεν γνωρίζουμε αν είναι ένωση διαστημάτων ή διαστ




$f \uparrow$ σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού

**Α4)** 1) Λ 2) Λ 3) Σ 4) Λ 5) Λ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1)** $A_f=(0,+\infty)$, $f'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ άρα $f\uparrow$

$f(1)=0$ κ' επειδή $f\uparrow$ το 1 είναι μοναδική ρίζα της $f$

$x>1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(1) \Leftrightarrow f(x)>0$

$x<1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1) \Leftrightarrow f(x)<0$

**Β2)** $A_g=(0,+\infty)$, $g'(x)=2\ln x+2+2x-4=2\ln x+2x-2=$

$=2(\ln x+x-1)=2f(x)$

Το πρόσημο της $g'$ είναι ίδιο με το πρόσημο της $f$

| | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $-$ | | $+$ |
| $g$ | | $\searrow$ | T.E. | $\nearrow$ |

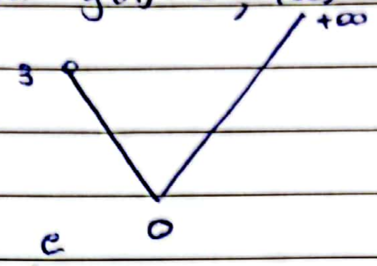
**Β3)** $A_1=(0,1]$, $g$ συνεχής κ' $\downarrow$ άρα $g(A_1)=[g(1),\lim_{x\to 0^+}g(x))=[0,3)$

$\cdot \lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$

$A_2=[1,+\infty)$, $g$ συνεχής κ' $\uparrow$ άρα $g(A_2)=[g(1),\lim_{x\to+\infty}g(x))=[0,+\infty)$,

$\lim_{x\to+\infty}(2x\ln x)=+\infty$ κ' $\lim_{x\to+\infty}(x^2-4x+3)=+\infty$.

άρα $g(A)=[0,+\infty)$




$\alpha^2+3 \geq 3$ άρα η εξίσωση
$g(x)=\alpha^2+3$ έχει μοναδική λύση για

B4) $\int_1^e (\ln x + x - 1)\,dx = \int_1^e \ln x\,dx + \int_1^e x\,dx - \int_1^e 1\,dx =$

$\int_1^e (x)'\ln x\,dx + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e - [x]_1^e = [x\ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - e +$

$e - 0 - (e-1) + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - e + 1 = e - e + 1 + \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} -$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = \lim_{u\to 0} e^u = e^0 = 1$, γιατί

Θέτω $x\ln x = u$, $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ άρα $u \to 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\sqrt{1-x^2} = 0$ άρα $f$ όχι συνεχής στο 0

Γ2) $f$ όχι συνεχής στο 0 άρα όχι παραγωγίσιμη. Επομένως το 0 εί
κρίσιμο σημείο της $f$.

Για $x>0$: $f'(x) = e^{x\ln x}(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} > 0$ άρα κρίσιμο

$A\left(e^{-1}, (e^{-1})^{e^{-1}}\right)$

Για $x<0$: $f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x\,\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \overset{x<0}{\Longleftrightarrow} x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

άρα $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ κρίσιμο σημείο.

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσε

Γ3) Για $x>0$: $f'(x)>0 \Leftrightarrow x^x(\ln x+1)>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>e^{-1}$

| $x$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $e^{-1}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | |
| $f$ | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ | |
| | Τ.Μ | Τ.Ε. | | Τ.Ε. | |

Στο 0 δεν έχουμε ακρ...
f όχι συνεχής ή $\lim_{x\to 0} f$...

Γ4) $y-f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=f'(-\frac{\sqrt{2}}{2})(x+\frac{\sqrt{2}}{2}) \Leftrightarrow y+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}$

Γ5) $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}\,dx$

Θέτω $\sqrt{1-x^2}=u \Leftrightarrow 1-x^2=u^2 \Leftrightarrow -2x\,dx=2u\,du \Leftrightarrow$
$x\,dx=-u\,du$.

$x=0$: $u=1$, $x=-1$: $u=0$

άρα $\int_{0}^{1} u(-u)\,du=-\int_{0}^{1}u^2\,du=-\left[\frac{u^3}{3}\right]=-\frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $f'(x)=1-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2x}{x^2+1}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}>0$ για κάθε $x\neq 1$

επειδή f συνεχής στο 1 είναι f ↑ στο $\mathbb{R}$. Επομένως
$f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x), \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$

• $\lim_{x\to-\infty}\ln(x^2+1) \overset{x^2+1=u}{\underset{u\to+\infty}{=}} \lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ άρα $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \ln(x^2+1)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^x - \ln(x^2+1)\right) = +\infty$, γιατί

$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln \frac{e^x}{x^2+1}\right]$

Θέτω $\frac{e^x}{x^2+1} = u$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} =$

άρα $f(A) = \mathbb{R}$

12) $f(3^x+4^x) = f(2+5x) \underset{f\ 1-1}{\overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow}} 3^x+4^x = 2+5x \Leftrightarrow 3^x+4^x-2-5x=0$

Έστω $h(x) = 3^x+4^x-2-5x$ Προφανείς ρίζες $x=1$ και $x=0$
Έστω ότι η $h(x)=0$ έχει 3 ρίζες, $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ με
$\rho_1<\rho_2<\rho_3$ και $h(\rho_1)=h(\rho_2)=h(\rho_3)=0$

$\left.\begin{array}{l}[\rho_1,\rho_2] \xrightarrow{Rolle} h'(\xi_1)=0 \\ [\rho_2,\rho_3] \xrightarrow{Rolle} h'(\xi_2)=0\end{array}\right\} \underset{Rolle}{\xrightarrow{[\xi_1,\xi_2]}} h''(\xi)=0$ άτοπο γιατί

$h'(x) = 3^x\ln3 + 4^x\ln4 - 5$, $h''(x) = 3^x(\ln3)^2 + 4^x(\ln4)^2 > 0$

$\left.\begin{array}{l}\text{άρα η } h \text{ έχει 2 το πολύ ρίζες} \\ \text{και επειδή δείξαμε ότι έχει τουλάχιστον δύο}\end{array}\right\} \Rightarrow$ έχει ακριβώς 2 τις $x=1$ και $x=0$.

13) $f(x^2) - \ln x = f(x^3)$, $x>0$
$f(x^2) - f(x^3) = \ln x$ $x=1$ προφανής ρίζα
Για $0<x<1$: $x^2>x^3 \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} f(x^2)>f(x^3) \Leftrightarrow f(x^2)-f(x^3)>0$
και $\ln x<0$ άρα αδύνατη για $x<$
Για $x>1$: $x^2<x^3 \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} f(x^2)<f(x^3) \Leftrightarrow f(x^2)-f(x^3)<0$
$\ln x>0$ άρα αδύνατη για $x>1$

άρα $x=1$ μοναδική ρίζα.

Παρατηρήσεις

$[1,2] \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f'(\xi_1) = f(2) - f(1)$

$[2,3] \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f'(\xi_2) = f(3) - f(2)$ +

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(3) - f(1) = 3 - \ln 10 - 1 + \ln 2 =$$
$$= 2 - \ln 10 + \ln 2 = 2 + \ln\frac{2}{10} = 2 + \ln\frac{1}{5}$$
$$2 + \ln 1 - \ln 5 = 2 - \ln 5 = \ln e^2 - \ln 5 \Leftrightarrow \ln\frac{e^2}{5}$$