ΘΕΜΑ Α

Α1. $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=2$

ii) $(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=$

$2\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-3\vec{\beta}^2=$

$2|\vec{\alpha}|^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-3|\vec{\beta}|^2=$

$2\cdot\sqrt{2}^2+2-3\cdot(2\sqrt{2})^2=$

$2\cdot 2+2-3\cdot 8=$

$4+2-24=$

-18

iii) $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})^2=$

$\vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=$

$|\vec{\alpha}|^2-4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4|\vec{\beta}|^2=$

$\sqrt{2}^2-4\cdot 2+4\cdot(2\sqrt{2})^2=$

$2-8+4\cdot 8=$

26 $\qquad |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|=\sqrt{26}$

Α2. $\vec{\alpha}=(3,2)$, $\vec{\beta}=(1,5)$, $\vec{\gamma}=(4,1)$

i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=3\cdot 1+2\cdot 5=3+10=13$

ii) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=3\cdot 4+2\cdot 1=12+2=14$

$\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=13-14=-1$

iii) $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=1\cdot 4+5\cdot 1=4+5=9$

$(|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta})\cdot 2\vec{\gamma}=2|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$

$=2\cdot\sqrt{3^2+2^2}\cdot 9$

$=2\sqrt{13}\cdot 9=18\sqrt{13}$

A3. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) + |\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=2$

$\Leftrightarrow 1\cdot 1 \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) + 1\cdot 1 \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=2$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) + \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=2$

Άρα $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=1$ και

$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=1$

Οπότε $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=0^\circ$ και $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=0^\circ$

Άρα $\vec{\alpha}\upuparrows\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\upuparrows\vec{\gamma}$

και

αφού $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|$

είναι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}=\vec{\gamma}$

ΘΕΜΑ Β

B_1 i) $A(-2,2)$, $B(8,12)$, $\Gamma(-10,6)$

$$\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = \qquad \vec{AB}(10,10) \quad \vec{A\Gamma}(-8,4)$$

$$= 40+80 = 120 \neq 0$$

Άρα τα A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

ii) $\lambda_{AB} = \dfrac{12-2}{8+2} = \dfrac{10}{10} = 1$

$A(-2,2)$: $y-2 = 1\cdot(x+2)$

$y-2 = x+2$

$AB \rightsquigarrow$ $y = x+4$

iii) $\lambda_{A\Gamma} = \dfrac{6-2}{-10+2} = \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2}$

$\lambda_{A\Gamma}\cdot\lambda_{B\Delta} = -1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\cdot\lambda_{B\Delta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} = 2.$

$B(8,12)$: $y-12 = 2(x-8) \Leftrightarrow y-12 = 2x-16$

$\Leftrightarrow y = 2x-4$

$B\Delta \rightsquigarrow$ $y = 2x-4$

iii) $M: \left(\dfrac{-10-2}{2}, \dfrac{6+2}{2}\right) = (-6, 4)$

$\lambda_{BM} = \dfrac{4-12}{-6-8} = \dfrac{-8}{-14} = \dfrac{4}{7}$ $\qquad y-4 = \dfrac{4}{7}(x+6)$

$7y-28 = 4x+24$

$BM \rightsquigarrow$ $-4x+7y-52 = 0$

B_1. v) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\cdot 120 = 60$ τ.μ.

B_2.

$(2\lambda+2)x - \lambda y + \lambda + 7 = 0 \quad (1) \qquad (\varepsilon_1)$

$(\lambda-1)\cdot x + (\lambda+1)\cdot y + \lambda + 3 = 0 \quad (2) \qquad (\varepsilon_2)$

i) $(1) \to 2\lambda+2=0 \Leftrightarrow 2\lambda=-2 \Leftrightarrow \lambda=-1$

και $-\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow$ η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ αφού δεν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$, το οποίο να μηδενίζει ταυτόχρονα τους συντελεστές των x, y.

$(2) \to \lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$

$\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$

$\Rightarrow$ η (2) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ για τον ίδιο λόγο, όπως προηγουμένως.

ii) Θεωρούμε διάνυσμα

$\boxed{\vec{\delta} = (-B, A) \parallel \varepsilon}$

$\vec{\delta_1} = (\lambda, 2\lambda+2) \parallel \varepsilon_1$

και $\vec{\delta_2} = (-\lambda-1, \lambda-1) \parallel \varepsilon_2$

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta_1} \perp \vec{\delta_2} \Leftrightarrow \vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2} = 0$$

$$\lambda(-\lambda-1) + (2\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -1$$

iii) α) Για $\lambda = 2 \xrightarrow{(2)} x + 3y + 5 = 0 \quad (\varepsilon)$

$$\lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{1}{3}$$

$$\varepsilon' \rightarrow y = -\frac{1}{3}x$$

β) $$d(M,\varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|1\cdot 2 + 3\cdot(-4) + 5|}{\sqrt{1^2+3^2}}$$

$M(2,-4)$

$$= \frac{|2-12+5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

Γ2. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

Γ3. α) $g(x) = x^2 + 2$ $\qquad A_g = \mathbb{R}$

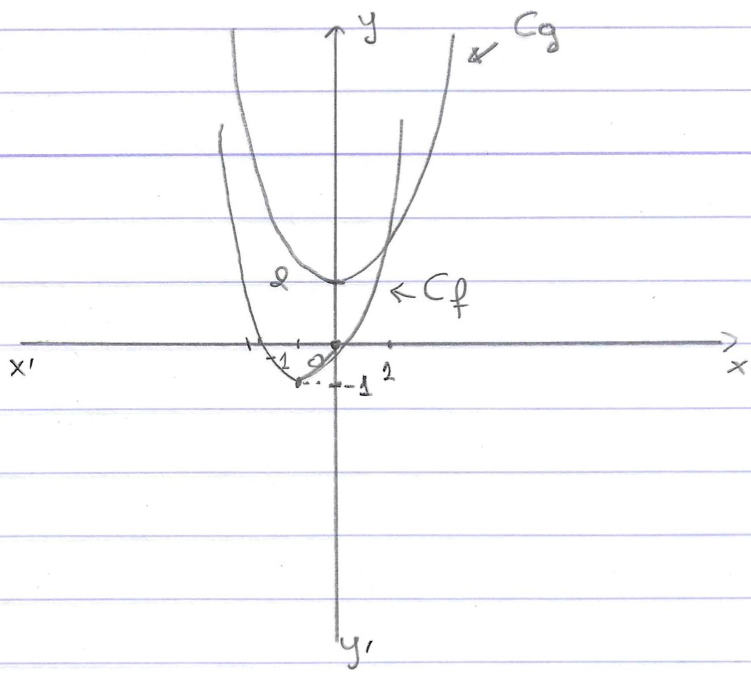
• Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$

• $g(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = g(x)$

Άρα η g είναι άρτια.

β) $f(x) = (x+1)^2 - 3 + 2$
$= (x+1)^2 - 1$

γ)



δ) Για $x \in (-\infty, 0]$ η g είναι γν. φθίνουσα.
Για $x \in [0, +\infty)$ η g είναι γν. αύξουσα.
Για $x \in (-\infty, -1]$ η f είναι γν. φθίνουσα.
Για $x \in [-1, +\infty)$ η f είναι γν. αύξουσα.

Συνέχεια

Γ3) → Η g παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 0$, ελάχιστη τιμή
$g(0) = 2$
Η f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = -1$, ελάχιστη τιμή
$f(-1) = -1$

ε) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq 2$
και $ημθ \leq 1$
Δηλ. $ημθ \leq 1 < 2 \leq g(x)$.
Άρα $ημθ < g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Οπότε η εξίσωση $g(x) = ημθ$ είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Δ

Δ_1. $\eta\mu\left(\frac{43\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\left(\frac{40\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\omega\right)=-\sigma\upsilon\nu\omega$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{16\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)=-\eta\mu\omega$

• $\varepsilon\varphi(2022\pi-\omega)=\varepsilon\varphi(-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega$

$\sigma\upsilon\nu\left(\omega-\frac{25\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{25\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{24\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\omega\right)$

$=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\omega$

$\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\varphi\left(\frac{4\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-\omega\right)=\varepsilon\varphi\omega$

$\sigma\upsilon\nu(\omega-2023\pi)=\sigma\upsilon\nu(2023\pi-\omega)$

$=\sigma\upsilon\nu(2022\pi+\pi-\omega)$

$=\sigma\upsilon\nu(\pi-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$

$A=\dfrac{(-\sigma\upsilon\nu\omega)\cdot(-\eta\mu\omega)\cdot(-\varepsilon\varphi\omega)}{\eta\mu\omega\cdot\varepsilon\varphi\omega\cdot(-\sigma\upsilon\nu\omega)}=1$

Δ_2. (I) $(2x+1)\cdot(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=2x^3-9x^2-3x+1$

$2\alpha x^3+2\beta x^2+2\gamma x+\alpha x^2+\beta x+\gamma=2x^3-9x^2-3x+1$

$2\alpha x^3+(2\beta+\alpha)x^2+(2\gamma+\beta)x+\gamma=2x^3-9x^2-3x+1$

$2\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=1$

$2\beta+\alpha=-9 \Leftrightarrow 2\beta+1=-9 \Leftrightarrow 2\beta=-10 \Leftrightarrow \beta=-5$

$2\gamma+\beta=-3 \Rightarrow 2\cdot1-5=-3 \Leftrightarrow -3=-3$ ισχύει.

$\gamma=1$

Άρα $P(x)=x^2-5x+1$

Δ3. α) $2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0$ (1)

Πιθανές ακέραιες ρίζες ±1

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & +3 & -3 & +1 & 1 \\ & 2 & -1 & 2 & -1 & \\ \hline 2 & -1 & 2 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$(1) \Rightarrow (x-1)(\underbrace{2x^3 - x^2} + \underbrace{2x - 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2(2x-1) + (2x-1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-1)(x^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \quad \text{ή} \quad 2x-1=0 \quad \text{ή} \quad x^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad x=\frac{1}{2} \qquad x^2=-1 \text{ Αδύνατη.}$$

Δ_3 β) $\varepsilon\varphi 2x - \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3}+3x\right) = 0$

Πρέπει:

$2x \neq \lambda\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$x \neq \frac{\lambda\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \lambda \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{3} + 3x \neq \lambda\pi \Leftrightarrow$

$3x \neq \lambda\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$x \neq \frac{\lambda\pi}{3} - \frac{\pi}{9}, \lambda \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2x = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3}+3x\right)$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}-3x\right)$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$

$\Leftrightarrow 2x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} - 3x$

$\Leftrightarrow 5x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{5} + \frac{\pi}{30}, \kappa \in \mathbb{Z}$

γ) $2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$, $x \in (0, 2\pi)$

$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = -1$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$

$0 < 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} < 2\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < 2\pi - \frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < \frac{4\pi}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \kappa < \frac{2}{3}$

$\kappa = 0$ $x = \frac{2\pi}{3}$

$0 < 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} < 2\pi$

$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < 2\pi + \frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < \frac{8\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < \kappa < \frac{4}{3}$

$\kappa = 1$ $x = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Δ3. δ) $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 0$, $x \in [0, \pi]$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu(-x)$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} + x$ ή $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ $\qquad 2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

Αδύνατη $\qquad x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$0 \leq \kappa\pi - \frac{\pi}{4} \leq \pi \Leftrightarrow$

$\frac{\pi}{4} \leq \kappa\pi \leq \pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\frac{\pi}{4} \leq \kappa\pi \leq \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{5}{4}$

$\kappa \in \mathbb{Z}$, άρα $\kappa = 1$

$x = \pi - \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{3\pi}{4}$