15/10/2023

Διαγώνισμα Άλγεβρας Α' Λυκείου

(Λύσεις)

Θέμα Α

Α1 Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 54

Α2 Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 49

Α3

1. $(-\alpha-\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
2. $\alpha^4-\beta^4 = (\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2) = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)$
3. $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
4. $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
5. $(\alpha-\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\alpha\gamma-2\beta\gamma$

Α4

i) Σ

ii) Λ

iii) Λ

iv) Λ

Θέμα Β

Β1 i) $K-\Lambda = (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$

$\Leftrightarrow 2\alpha^2+\beta^2+9-2\alpha(3-\beta) = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2-6\alpha+9$

$\Leftrightarrow \cancel{2\alpha^2}+\cancel{\beta^2}+\cancel{9}-\cancel{6\alpha}+\cancel{2\alpha\beta} = \cancel{2\alpha^2}+\cancel{2\alpha\beta}+\cancel{\beta^2}-\cancel{6\alpha}+\cancel{9}$

$\Leftrightarrow 0=0$ ισχύει

ii) $K \geq \Lambda$

$\Leftrightarrow K - \Lambda \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 6a + 9) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 + (a-3)^2 \geq 0$ ισχύει διότι $(a+b)^2 \geq 0$ κ' $(a-3)^2 \geq 0$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$

iii) Η ισότητα $K = \Lambda$ ισχύει όταν

$a+b=0$ και $a-3=0$

$\Leftrightarrow b = -a$ $\Leftrightarrow a = 3$

$\Leftrightarrow b = -3$

B2 i) Αφού $(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=4$ τότε:

$a\cdot\frac{1}{a} + a\cdot\frac{1}{b} + b\cdot\frac{1}{a} + b\cdot\frac{1}{b} = 4$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 4$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$

ii) Αφού $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$ τότε:

$ab\cdot\frac{a}{b} + ab\cdot\frac{b}{a} = 2ab$ (αφού $a, b \neq 0$)

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 = 0$

$\Leftrightarrow a - b = 0$

$\Leftrightarrow a=\beta$

Θέμα Γ

Γ1 i) $\dfrac{x^3-x^2+x}{x^3+1} = \dfrac{x\cancel{(x^2-x+1)}}{(x+1)\cancel{(x^2-x+1)}} = \dfrac{x}{x+1}$

ii) $\dfrac{3x^2+6x}{-x^2-4x-4} = \dfrac{3x(x+2)}{-(x^2+4x+4)} = \dfrac{3x\cancel{(x+2)}}{-(x+2)^{\cancel{2}}} =$

$= -\dfrac{3x}{x+2}$

iii) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{x^3+x^2}{(x+1)^3} = \left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{x^3+x^2}{(x+1)^3} =$

$= \left(\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{x^2\cdot(x+1)}{(x+1)^3} = \dfrac{(x-1)^2\cancel{(x+1)^2}\cdot\cancel{x^2}\cdot\cancel{(x+1)}}{\cancel{x^2}\cdot\cancel{(x+1)^3}} =$

$= (x-1)^2$

Γ2 $A = \dfrac{x^{-4}\cdot y^2\cdot(x^{-1}\cdot y^{-2})^4\cdot(x^{-2}\cdot y)^{-1}}{(x^2y)^{-2}\cdot y^{-3}} =$

$= \dfrac{x^{-4}\cdot y^2\cdot x^{-4}\cdot y^{-8}\cdot x^2\cdot y^{-1}}{x^{-4}\cdot y^{-2}\cdot y^{-3}} =$

$= \dfrac{x^{-6}\cdot y^{-7}}{x^{-4}\cdot y^{-5}} =$

$= x^{-2}\cdot y^{-2} =$

$= (xy)^{-2} =$

$= \frac{1}{(xy)^2}$

(Б) $A = x - (x+2)^3 + 6(x+1)^2 + x(x-1)(x+1) =$

$= x - (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + 6(x^2 + 2x + 1) + x(x^2 - 1) =$

$= \cancel{x} - \cancel{x^3} - \cancel{6x^2} - \cancel{12x} - 8 + \cancel{6x^2} + \cancel{12x} + 6 + \cancel{x^3} - \cancel{x} =$

$= -2$

αρα η παράσταση Α είναι ανεξάρτητη του x.

Θέμα Δ

(Δ1) i) Αφου $1 \leq a \leq 6$ (1) κ' $2 \leq b \leq 7 \overset{\cdot 2}{\iff} 4 \leq 2b \leq 14$ (2)

Απο (1)+(2) $\Rightarrow 5 \leq a + 2b \leq 20$

ii) Αφου $1 \leq a \leq 6$ (1) κ' $2 \leq b \leq 7$

$\iff -2 \geq -b \geq -7$

$\iff -7 \leq -b \leq -2$ (2)

Απο (1)+(2) $\Rightarrow -6 \leq a - b \leq 4$

iii) Αφού $1 \leq a \leq 6$ και $2 \leq b \leq 7$

$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{a} \geq \frac{1}{6}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{7}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{1}{a} \leq 1$ (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{7} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$ (2)

Από (1)+(2) $\Rightarrow \frac{1}{6}+\frac{1}{7} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leq 1+\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{13}{42} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leq \frac{3}{2}$

iv) Αφού $1 \leq a \leq 6$ (1) και $2 \leq b \leq 7$

$\Leftrightarrow \frac{1}{7} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$ (2)

Από (1)·(2) $\Rightarrow \frac{1}{7} \leq a \cdot \frac{1}{b} \leq 6 \cdot \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{7} \leq \frac{a}{b} \leq 3$

v) Αφού $1 \leq a \leq 6$ και $2 \leq b \leq 7$

$\Rightarrow 1^2 \leq a^2 \leq 6^2$ $\Leftrightarrow 2^2 \leq b^2 \leq 7^2$

$\Leftrightarrow 1 \leq a^2 \leq 36$ (1) $\Leftrightarrow 4 \leq b^2 \leq 49$ (2)

Από (1)+(2) $\Rightarrow 5 \leq a^2+b^2 \leq 85$

Δ2) i) $A = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$

$= 2x^2 \cdot (x-3) + (x-3)$

$= (x-3) \cdot (2x^2+1)$

ii) $A > 2x^2 + 1$

$\Leftrightarrow (x-3)(2x^2+1) > 2x^2+1$

$\Leftrightarrow (x-3)(2x^2+1) - (2x^2+1) > 0$

$\Leftrightarrow (2x^2+1)(x-3-1) > 0$

$\Leftrightarrow (2x^2+1)(x-4) > 0$ <u>ισχύει</u>

διότι $2x^2+1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $x-4 > 0$ αφού $x > 4$

iii) $A \geq (x-3)(10x-11)$

$\Leftrightarrow (x-3)(2x^2+1) - (x-3)(10x-11) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(2x^2+1-10x+11) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(2x^2-10x+12) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-3) \cdot 2 \cdot (x^2-5x+6) \geq 0$

$\overset{*}{\Leftrightarrow} (x-3) \cdot 2 \cdot (x-3)(x-2) \geq 0$

$\Leftrightarrow 2 \cdot (x-3)^2 \cdot (x-2) \geq 0$ <u>ισχύει</u>

διότι $(x-3)^2 \geq 0$ και $x-2 > 0$ αφού $x > 2$

* <u>Για το x^2-5x+6</u>: $x^2-5x+6 = x^2-2x-3x+6$

$= x(x-2) - 3(x-2)$

$= (x-2) \cdot (x-3)$

Δ3) Έστω ότι $a = 1$. Τότε $1^3 + 1 = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$ <u>Άτοπο</u>

Άρα $a \neq 1$.