ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓ. Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

3/1/2024

ΘΕΜΑ Α

$\boxed{A4}$ i) Σ ii) Λ iii) Λ iv) Σ v) Λ

ΘΕΜΑ Β

$\boxed{B1}$ ▸ $A_{g\circ h} = \{x \in A_h / h(x) \in A_g\} = \{x>0 / \ln x > 0\} = (1,+\infty)$

▸ $g(h(x)) = \dfrac{e^{\ln x}+1}{e^{\ln x}-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$

$\boxed{B2}$ α) $f'(x) = \dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$ άρα $f \downarrow$ στο $(1,+\infty)$

οπότε κ' «1-1»

▸ f συνεχής κ' $\downarrow$ στο $(1,+\infty) \to f(\Delta) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to1^+} f(x)\right) = (1,+\infty)$

άρα $A_{f^{-1}} = (1,+\infty)$

β) Για $x>1$ και $y>1$ θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow$

$x-1 = xy - y \Leftrightarrow x(1-y) = -1-y \Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1}$

άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$ αφού $A_f = A_{f^{-1}} = (1,+\infty)$

και $f(x) = f^{-1}(x)$, $\forall x>1$ τότε $f = f^{-1}$

$\boxed{B3}$ ▸ $I_1 = \int_2^3 \dfrac{x+1}{x-1}dx = \int_2^3 \dfrac{x-1+2}{x-1}dx = \int_2^3 \left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)dx = \left[x + 2\ln|x-1|\right]_2^3 =$

$= 3-2+2(\ln 2 - \ln 1) = 1 + 2\ln 2$

▸ $I_2 = \int_0^1 \ln(x+1)dx = \int_0^1 (x+1)'\ln(x+1)\,dx = \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^1 - \left[x\right]_0^1$

$= 2\ln 2 - 1$

$\boxed{B4}$ $\sigma v x \le 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 1$ $\forall x>1$

άρα η εξίσωση $f(x) = \sigma v x$ αδύνατη $\forall x > 1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $A_g=\mathbb{R}$, $g(-x)=(-x)\eta\mu(-x)+\sigma\upsilon\nu(-x)=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=g(x)$

Γ2 Θεωρώ, $h(x)=f(x)-g(x)=x^2-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$

- $h'(x)=2x-\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=2x-x\sigma\upsilon\nu x=x(\underset{+}{2-\sigma\upsilon\nu x})$

Για $x>0$: $h'(x)>0$ άρα $h\uparrow$ στο $(0,+\infty)$ οπότε κ' 1-1

- h ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ $[0,\pi]$

$h(0)=-1<0$
$h(\pi)=\pi^2+1>0$ $\Big\rangle$ $h(0)h(\pi)<0$ από Θ. Bolzano η ΕΞΙΣΩΣΗ $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει ΜΙΑ ΤΟΥΛ. ΡΙΖΑ ΣΤΟ $(0,\pi)$

ΚΑΙ ΕΠΕΙΔΗ h 1-1 ΣΤΟ $(0,\pi)$ ΤΟΤΕ ΕΧΕΙ ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ ΡΙΖΑ

ΔΗΛ. $\exists\, x_1$ ΜΟΝΑΔΙΚΟ ΣΤΟ $(0,\pi)$ τ.ω. $h(x_1)=0$

Γ3 $h(-x)=(-x)^2-g(-x)=x^2-g(x)=h(x)$ άρα η h

ΕΙΝΑΙ ΑΡΤΙΑ ΣΤΟ $\mathbb{R}$

Επίσης, ΓΙΑ $x<0$: $h'(x)<0$ άρα $h\downarrow$ στο $(-\infty,0)$ οπότε 1-1

Έχουμε, $h(-x)=h(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ΓΙΑ $x=x_1$:

$h(-x_1)=h(x_1)\Leftrightarrow h(-x_1)=0$ άρα $-x_1$ ΡΙΖΑ ΤΗΣ $h(x)=0$

ΟΤΑΝ $x<0$. ΤΕΛΙΚΑ Η ΕΞΙΣ. $h(x)=0$ ΕΧΕΙ ΑΚΡΙΒΩΣ 2 ΡΙΖΕΣ

Γ4 • $t(x)=\dfrac{g'(x)}{x}-\eta\mu x=\dfrac{\cancel{\eta\mu x}+x\sigma\upsilon\nu x-\cancel{\eta\mu x}}{x}-\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in(0,2\pi]$

$t(x)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow 1-\varepsilon\varphi x=0\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$

$x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ $\qquad 0<k\pi+\frac{\pi}{4}\le 2\pi\Leftrightarrow 0<k+\frac{1}{4}\le 2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k\le 2-\frac{1}{4}$

$k=0\to x=\frac{\pi}{4}$, $k=1\to x=\frac{5\pi}{4}$

▶ $f(x)$ ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ $[0, 2\pi]$ ΩΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΟΤΕ ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΗΣ f ΦΑΙΝΕΤΑΙ ΣΤΟ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΠΙΝΑΚΑ ΑΠΟ ΣΥΝΕΠΕΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ Bolzano

x	0		$\pi/4$		$5\pi/4$		2π
x_0		$\pi/6$		π		2π	
$f(x_0)$		$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	0	-1	0	1	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = συν\frac{\pi}{6} - ημ\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$f(\pi) = -1$$

$$f(2\pi) = 1$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (συνx - ημx)e^x\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} συνx\,e^x\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ημx\,e^x\,dx = I_1 - I_2$$

▶ $$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} συνx\,e^x\,dx = \left[e^x συνx\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -ημx\cdot e^x\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ημx\cdot e^x\,dx$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} + \left[e^x ημx\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - I_1 \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} + e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_1 = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ημx\cdot e^x\,dx = \left[e^x ημx\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} συνx\,e^x\,dx =$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} - I_1 \Leftrightarrow \boxed{I_2 = e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} - I_1}$$

$$I = I_1 - e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} + I_1 = 2I_1 - e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \cancel{e^{\frac{\pi}{2}}} - \frac{2\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} - \cancel{e^{\frac{\pi}{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$$

ΘΕΜΑ Δ

$\boxed{Δ1}$. $h(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 1$

• $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ άρα $h \nearrow$ στο $(1, +\infty)$

$h(1) = -1 < 0$

$h(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$ $\Big\rangle$ $h(1)h(e) < 0$

Επειδή, h συνεχής στο $[1, e]$ από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλ. ρίζα στο $(1, e)$ και είναι μοναδική αφού $h \nearrow$ στο $(1, +\infty)$ δηλ. $\exists\, x_0 \in (1, +\infty)$: $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0$

$\boxed{Δ2}$ i) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} - \frac{f'(x-h) - f'(x)}{h}\right)$

$\overset{*}{=} \frac{1}{2}\left(f''(x) + f''(x)\right) = f''(x)$

$* \lim\limits_{h\to 0} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{h} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{f'(x+u) - f'(x)}{-u} = -f''(x)$

ii) $f(x) = x\left(f(x) - f'(x)\right)\ln x \overset{x>1}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x} f(x) = f(x)\ln x - f'(x)\ln x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} f(x) + f'(x)\ln x = f(x)\ln x \Leftrightarrow \left(\ln x\, f(x)\right)' = \ln x \cdot f(x)$

$\Leftrightarrow \ln x \cdot f(x) = c e^x$ Για $x = e$: $f(e) = c \cdot e^e \rightarrow c = 1$

Άρα $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$, $x > 1$

$\boxed{\Delta 3}$ $f'(x) = \dfrac{e^x \ln x - \frac{1}{x} e^x}{\ln^2 x} = \dfrac{e^x(\ln x - \frac{1}{x})}{\ln^2 x} = \dfrac{e^x \cdot h(x)}{\ln^2 x}$

Από $\boxed{\Delta 1}$ έχουμε $h(x_0)=0$ κ' $h \uparrow$ στο $(1,+\infty)$

$x > x_0 \overset{h\uparrow}{\Longleftrightarrow} h(x) > h(x_0) \Leftrightarrow h(x) > 0$

$x < x_0 \overset{h\uparrow}{\Longleftrightarrow} h(x) < h(x_0) \Leftrightarrow h(x) < 0$

$\boxed{\Delta 4}$ $\displaystyle\int_2^{\alpha} g(x)\,dx = \int_2^{\alpha} f(x)\,dx + \int_2^{\alpha} x\ln x\, f'(x)\,dx$

$\displaystyle = \int_2^{\alpha} f(x)\,dx + \Big[x\ln x\, f(x)\Big]_2^{\alpha} - \int_2^{\alpha} (1+\ln x) f(x)\,dx$

$\displaystyle = \cancel{\int_2^{\alpha} f(x)\,dx} + \alpha\ln\alpha\, f(\alpha) - 2\ln 2\, f(2) - \cancel{\int_2^{\alpha} f(x)\,dx} - \int_2^{\alpha} e^x\,dx$

$\displaystyle = \alpha\ln\alpha \frac{e^{\alpha}}{\ln\alpha} - 2\ln 2 \frac{e^2}{\ln 2} - \Big[e^x\Big]_2^{\alpha}$

$= \alpha e^{\alpha} - 2e^2 - e^{\alpha} + e^2 = e^{\alpha}(\alpha - 1) - e^2$

$\boxed{\Delta 5}$ $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} (\alpha-1)e^{\alpha} - e^2 = +\infty$ άρα $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} E(\alpha) = +\infty$

- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \Big(E(\alpha) + ημ\, E(\alpha)\Big] = \lim\limits_{u\to+\infty} (u + ημ u) =$

$= \lim\limits_{u\to+\infty} u\left(1 + \dfrac{ημ u}{u}\right) \overset{*}{=} +\infty(1+0) = +\infty$

$\left|\dfrac{ημ u}{u}\right| \le \dfrac{1}{|u|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|u|} \le \dfrac{ημ u}{u} \le \dfrac{1}{|u|}$

$ \downarrow \qquad \downarrow^{κ.π} \qquad \downarrow$

$ 0 \qquad\ \ 0 \qquad\ \ 0$