Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 24/9/24

A4) 1) Λ 2) Σ 3) Λ 4) Λ 5) Σ

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ B}}$

B1) $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2x^3-2}{x^2}$

$f'(x) \geq 0 \iff \dfrac{2x^3-2}{x^2} \geq 0 \overset{x^2>0}{\iff} 2x^3-2 \geq 0 \iff x^3 \geq 1 \iff x \geq 1$

x		0		1	
f'	$-$	‖	$-$		$+$
f	↘	‖	↘		↗

Τ.Ε. $f(1)=3$

B2) $A_1=(-\infty,0)$, $f(A_1) \xrightarrow[f \searrow]{f\ \text{συνεχής}} \left(\lim\limits_{x\to 0^-} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty)$

$A_2=(0,1]$, $f(A_2) \xrightarrow[f \searrow]{f\ \text{συνεχής}} \left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = [3,+\infty)$

$A_3=[1,+\infty)$, $f(A_3) \xrightarrow[f \nearrow]{f\ \text{συνεχής}} \left[f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = [3,+\infty)$

άρα $f(A) = f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3) = \mathbb{R}$

B3) $0\in f(A_1)$, $0\notin f(A_2)$, $0\notin f(A_3)$
άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα $x_0\in(-\infty,0)$ κι επειδή $f \searrow_1$
η ρίζα μοναδική

B4) $f''(x) = 2 + \dfrac{4x}{x^4} = 2 + \dfrac{4}{x^3} = \dfrac{2x^3+4}{x^3}$

$f''(x) \geq 0 \iff (2x^3+4)x^3 \geq 0$

x		$-\sqrt[3]{2}$	0	
x^3	$-$	$-$		$+$
$2x^3+4$	$-$	$+$		$+$
f''	$+$	$-$		$+$
f	$\cup$	$\cap$		$\cup$

Σ.Κ

$2x^3+4 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq -2 \Leftrightarrow$
$x \geq -\sqrt[3]{2}$

Β5) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) dx = \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 \frac{2}{x} dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 2\left[\ln|x|\right]_1^2 =$

$\frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 2\ln 2 = \frac{7}{3} + 2\ln 2$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Γ}}$

Γ1) Για $x<0$ f συνεχής ως ρητή
Για $x>0$ f συνεχής ως σύνθεση συνεχών
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \neq f(0)$ άρα f συνεχής στο $\mathbb{R}^*$

Γ2) Για $x<0$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ άρα $f \searrow$ στο $(-\infty, 0)$
Για $x>0$: $f'(x) = \frac{e^x+1}{e^x+x} > 0$ άρα $f \nearrow$ στο $[0, +\infty)$

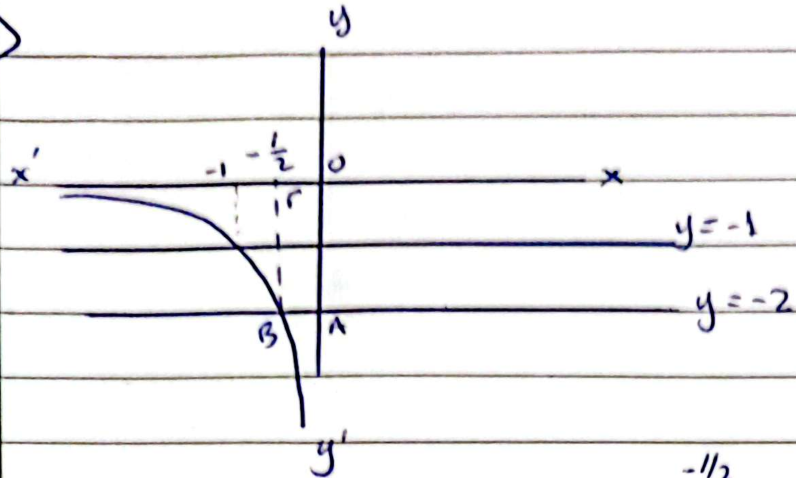
$A_1 = (-\infty, 0)$, $f(A_1) \xrightarrow[f \searrow]{f \text{ συνεχής}} \left(\lim_{x\to 0^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) = (-\infty, 0)$

$A_2 = [0, +\infty)$, $f(A_2) \xrightarrow[f \nearrow]{f \text{ συνεχής}} \left[f(0), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = [0, +\infty)$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

Γ3)



$f(x)=-2 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=-2 \Leftrightarrow$
$x=-\frac{1}{2}$

$$E=(OABΓ)+\int_{-1}^{-1/2}(-1-f(x))\,dx=\frac{1}{2}\cdot 1+\int_{-1}^{-1/2}\left(-1-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}+\left[-x-\ln|x|\right]_{-1}^{-1/2}=$$

$$\frac{1}{2}+\left(+\frac{1}{2}-1-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1-\ln\frac{1}{2}=\ln 2 \text{ τ.μ.}$$

Γ4) Για $x<0$: $f''(x)=\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}<0$ άρα f ↓ οπότε δεν έχει Σ.Κ.

Για $x\geq 0$: $f''(x)=\frac{e^x(e^x+x)-(e^x+1)(e^x+1)}{e^x+x}=\frac{e^{2x}+xe^x-e^{2x}-2e^x-1}{e^x+x}=$

$\frac{xe^x-2e^x-1}{e^x+x}$ Έστω $g(x)=xe^x-2e^x-1$
$g'(x)=e^x+xe^x-2e^x=xe^x-e^x=e^x(x-1)$

	0	1	
g'		$-$	$+$
g		↘	↗

$A_1=[0,1]$, $g([0,1])\xrightarrow[g\downarrow]{g\text{ συνεχής}}[g(1),g(0)]=[-e-1,-3]$

$A_2=[1,+\infty)$, $g([1,+\infty))\xrightarrow[g\uparrow]{g\text{ συνεχής}}[g(1),\lim_{x\to+\infty}g(x))=[-e-1,+\infty)$

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x(x-2)-1\right]=+\infty$

$0\in g(A_2)$, $0\notin g(A_1)$ άρα η $f''(x)$ έχει 1 ρίζα

Παρατηρήσεις

		1	x_0	
g		$\searrow$		$\nearrow$
f''		$-$		$+$
f		$\frown$		$\smile$

Σ.Κ.

$x > x_0 \overset{g \uparrow}{\iff} g(x) > g(x_0) = 0$

$x < x_0 \overset{g \uparrow}{\iff} g(x) < g(x_0) = 0$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Δ}}$

Δ1) Είναι $f(x) \geq 0 \iff f(x) \geq f(\alpha)$

$\left.\begin{array}{l} \alpha \text{ εσωτερικό σημείο του } A_f \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } \alpha \\ f(\alpha) \text{ ολικό ελάχιστο} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Θ. Fermat}} f'(\alpha) = 0$

$f'(x) = \ln\alpha - \dfrac{\alpha}{x}$, $f'(\alpha) = 0 \iff \ln\alpha - 1 = 0 \iff \ln\alpha = 1 \iff \alpha = e$

άρα $f(x) = x - e\ln x$

$f'(x) = 1 - \dfrac{e}{x}$, $f'(x) \geq 0 \iff x \geq e$

	0		e	
f'		$-$		$+$
f		$\searrow$		$\nearrow$

$f(e) = 0$

Δ2) $e^{x-2024} = x^e$

Αν $x \leq 0$ αδύνατη γιατί $e^{x-2024} > 0$ και $x^e \leq 0$

Αν $x > 0$: $e^{x-2024} = x^e \iff \ln e^{x-2024} = \ln x^e \iff$

$x - 2024 = e\ln x \iff x - e\ln x = 2024 \iff f(x) = 2024$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x - e\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1 - e\underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{\text{DLH} \to 0}\right] = +\infty$

άρα $\left.\begin{array}{l} f((0,e]) = [0,+\infty) \\ f([e,+\infty)) = [0,+\infty) \end{array}\right\}$ $2024 \in f((0,e])$ και $2024 \in f([e,+\infty))$ άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες.

13) i) $e^x \geq x^e \overset{\ln x}{\underset{\uparrow}{\Leftrightarrow}} \ln e^x \geq \ln x^e \Leftrightarrow x \ln e \geq e \ln x \Leftrightarrow x - e\ln x \geq 0 \Leftrightarrow$

$f(x) \geq 0$ ισχύει, η ισότητα ισχύει για $x = e$

ii) $e^x \geq x^e \quad \forall x > 0$

$$\left.\begin{array}{l} x=\kappa:\ e^\kappa \geq \kappa^e \\ x=\lambda:\ e^\lambda \geq \lambda^e \end{array}\right\} \xrightarrow{+} e^\kappa + e^\lambda \geq \kappa^e + \lambda^e \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \kappa^x + \lambda^x \geq x^\kappa + x^\lambda \\ x = e \end{array}\right\} \Rightarrow \kappa^e + \lambda^e \geq e^\kappa + e^\lambda \quad (2)$$

$(1),(2) \Rightarrow e^\kappa + e^\lambda = \kappa^e + \lambda^e \Leftrightarrow (e^\kappa - \kappa^e) + (e^\lambda - \lambda^e) = 0 \Leftrightarrow$

$e^\kappa - \kappa^e = 0$ και $e^\lambda - \lambda^e = 0$

$e^\kappa = \kappa^e \qquad e^\lambda = \lambda^e$

$\kappa = e \qquad \lambda = e$

14) i) $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = (1-e)x + e$

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{(1-e)x + e - f(x)} = -\infty$, γιατί

· $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

$f''(x) = \dfrac{e}{x^2} > 0$, άρα f ∪ και $y = (1-e)x + e$ η εφαπτομένη της άρα

$f(x) > (1-e)x + e$ κοντά στο 1, επομένως $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{y - f(x)} = -\infty$.