

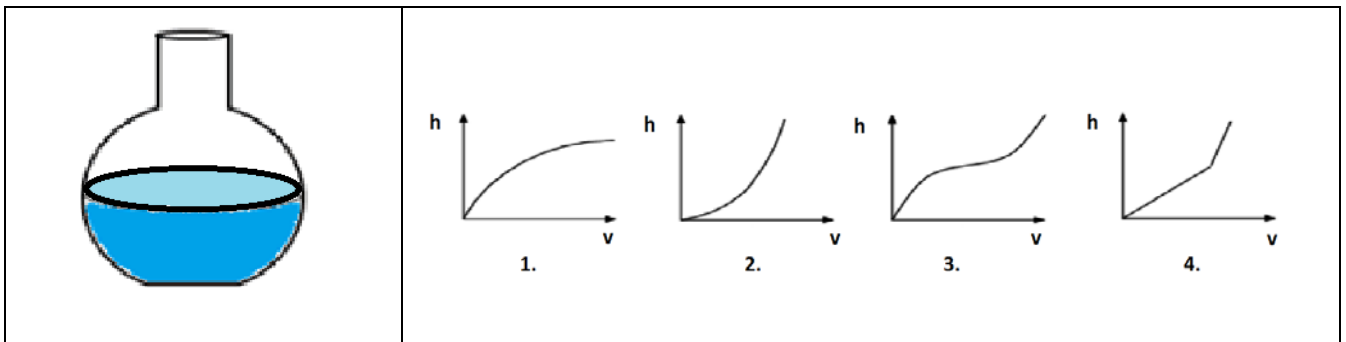
1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 21 / 3 /2021

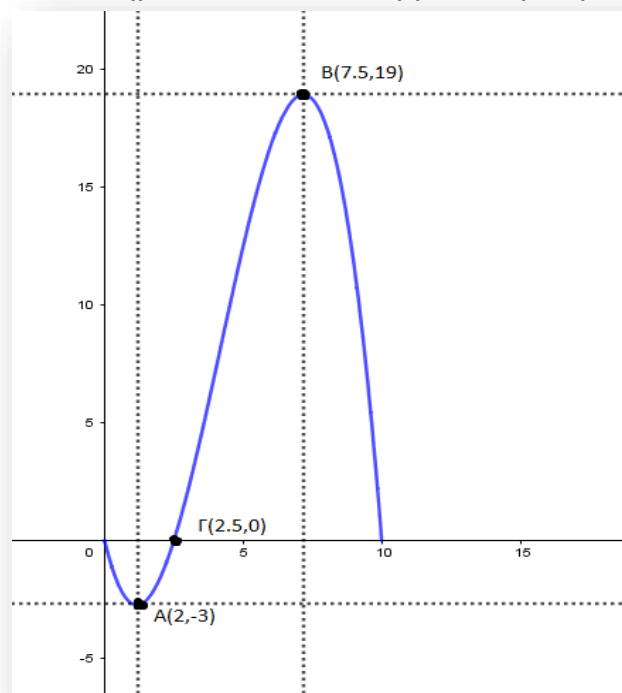
Θέμα Α

A1. Φανταστείτε πως το δοχείο γεμίζει με νερό. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση ύψους (h) ως προς τον όγκο (v) ;



A2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης θέσης ενός κινητού που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 10 sec. Τα σημεία A, B αντιστοιχούν στα ακρότατα της συνάρτησης και το Γ στο μοναδικό σημείο καμπής της. Να βρείτε:

1. Τις χρονικές στιγμές που μηδενίζεται η ταχύτητα και το χρονικό διάστημα που κινήθηκε δεξιά.
2. Το συνολικό διάστημα που διάνυσε.
3. Το χρονικό διάστημα που εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση.



1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

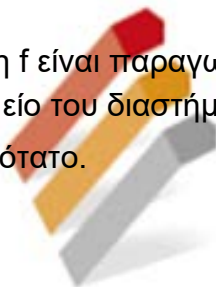


A3.

α) Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω ισχυρισμούς γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A** αν είναι αληθής , ή το γράμμα **Ψ** , αν είναι ψευδής (**1μ**)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (**3μ**) .

1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .
2. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .
3. Αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της τότε θα είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.
4. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα.
5. Αν η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο (α, β) και για ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος ισχύει $f'(x_0) = 0$ τότε για $x \neq x_0$ η f παρουσιάζει ακρότατο.



En Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Μονάδες : 2 – 3 – 20

Θέμα Β

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

- $g(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ και $g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 3}$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{12}{x^2 + 3}$.

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία-ακρότατα και κυρτότητα-σημεία καμπής.

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και το σύνολο τιμών της f .

B4. Με βάση τα παραπάνω να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f .

Μονάδες : 4 – (5+5) – (3+3) – 5

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|xf(x) - x^2| = 2(x - \ln x)$ για $x > 0$.

Αν επιπλέον ισχύει $1 - f(1)\ln x \leq x$ για $x > 0$ τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2 \frac{\ln x}{x} + x - 2$, $x > 0$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Γ3. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{9x-x^2}{2}}$.

Γ4. Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Β) Να βρείτε το σημείο της $C_{f^{-1}}$ που απέχει την μικρότερη απόσταση από τον άξονα συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Μονάδες : 8 – (4+3) – 5 – (2+3)

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη
- $f''(x) + f(x) > 2f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Η ευθεία $y=3x+1$ είναι εφαπτομένη της C_f για $x=0$.
- $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετήσετε τη g ως προς την κυρτότητα.

Δ2. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g για $x=0$ και να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x f'(\ln x) - x f'(x) = e^x f(\ln x) - x f(x)$ είναι αδύνατη για $x > 0$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $2e^x < \frac{f(x) - e^x}{x} < f'(x) - f(x)$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες : 5 – (4 + 4) – 6 – 6