Λύσεις Μαθηματικών Γ Λυκείου : 21/3/2021

ΘΕΜΑ Α

A1 → 3

A2 → 1. $U(t)=0 \Leftrightarrow S'(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=7{,}5 \end{cases}$ και $t=0$, $t=10$

Προς τα δεξιά : $U(t) \geq 0 \Leftrightarrow S'(t) \geq 0 \Leftrightarrow S(t) \uparrow$: $t \in [2, 7.5]$

2. $t \in [0,2]$ προς τα αριστερά $S_1 = 3$
$t \in [2, 7.5]$ " " δεξιά $S_2 = 22$
$t \in [7.5, 10]$ " " αριστερά $S_3 = 19$
$\Big\}\ S_{ολ} = 44$

3. $a(t) \leq 0 \Leftrightarrow S''(t) \leq 0 \Leftrightarrow S(t)$; κοίλη $t \in [2{,}5, 10]$

A3. 1. Ψ διότι πρέπει να υπάρχει εφαπτόμενη στο x_0

2. Ψ πχ $f(x)=x^3$ είναι $\uparrow$ όμως $f'(x)=3x^2 \geq 0$

3. Ψ πχ $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο 0 και όχι παρ/μη.

4. Ψ πχ $f(x)=7$ (σταθερή) τότε $f(A)=\{7\}$ μονοσύνολο

5. Ψ πχ $f(x)=x^3$ ισχύει $f'(0)=0$ όμως το $(0, f(0))$ δεν είναι ακρότατο.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $g(x)=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$ τότε $g(f(x))=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{f(x)}}$

όμως από υπόθεση $g(f(x))=\sqrt{x^2+3}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{f(x)}}=\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \sqrt{f(x)}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}} \text{ άρα } \boxed{f(x)=\frac{12}{x^2+3}}$$

Β2. $f'(x)=12\,\frac{-2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-24x}{(x^2+3)^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

Η f ↗ $(-\infty,0]$, Η f ↘ $[0,+\infty)$, $f(0)=4$ ολικό μέγιστο.

$$f''(x)=-24\,\frac{(x^2+3)^{\cancel{2}}-x\cdot 2\cancel{(x^2+3)}\cdot 2x}{(x^2+3)^{\cancel{4}3}}=-24\,\frac{x^2+3-4x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(x)=\frac{72(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		∪		∩		∪	

Η f ∪ στο $(-\infty,-1]$ και στο $[1,+\infty)$ και κοίλη στο $[-1,1]$.
Σημεία καμπής $(-1,3)$ και $(1,3)$

Β3 • Δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

• Πλάγιες / οριζόντιες:

Στο $+\infty$: παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ Άρα $\boxed{y=0}$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

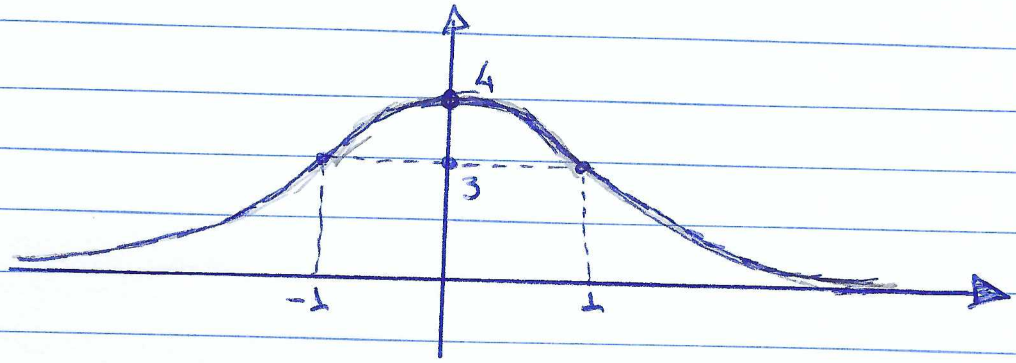
Στο $-\infty$: — // — $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ Άρα $\boxed{y=0}$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$A_1=(-\infty,0] \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f\ \nearrow} f(A_1)=(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(0)]=(0,4]$$
$$A_2=[0,+\infty) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f\ \searrow} f(A_2)=(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(0)]=(0,4]$$

B3 (συνέχεια)

$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (0, 4]$.

B4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από υπόθεση $1 - f(1)\ln x \le x$

έστω $g(x) = 1 - f(1)\ln x - x$, $x > 0$ τότε $g(1) = 0$

και $g(x) \le 0 \Leftrightarrow g(x) \le g(1)$

Άρα το $g(1)$ μέγιστο της g

$x = 1$ εσωτερικό του πεδίου ορισμού όπου g παρ/μη

οπότε από Θ Fermat $g'(1) = 0$

$g'(x) = -\dfrac{f(1)}{x} - 1 \xrightarrow{x=1} \boxed{f(1) = -1}$

Ισχύει $|x f(x) - x^2| = 2(x - \ln x)$

έστω $h(x) = x f(x) - x^2$ τότε $\boxed{|h(x)| = 2(x - \ln x)}$ (1)

• έστω $h(x) = 0 \xrightarrow{(1)} 0 = 2(x - \ln x)$ Άτοπο

από εφαρμογή σχολικού $x - \ln x \ge 1$ Άρα $x - \ln x \ne 0$.

Συνεπώς $h(x) \ne 0$ και συνεχής ως πράξεις συνεχών

οπότε έχει σταθερό πρόσημο.

$h(1) = f(1) - 1 = -1 - 1 = -2$ Άρα $h(x) < 0$

$(1) \Longrightarrow -h(x) = 2(x - \ln x) \Leftrightarrow -x f(x) + x^2 = 2(x - \ln x)$

$\Leftrightarrow -x f(x) = 2x - 2\ln x - x^2 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} + x - 2,\ x > 0}$

Γ2. $f'(x) = 2\frac{1-\ln x}{x^2} + 1 = \frac{2-2\ln x + x^2}{x^2}$

Έστω $k(x) = 2-2\ln x + x^2,\ x>0$

$k'(x) = -\frac{2}{x} + 2x = 2\frac{x^2-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Συνεπώς $k(x) \geq k(1) = 3$ Άρα $k(x) > 0$

οπότε $f'(x) = \frac{k(x)}{x^2} > 0$ δηλαδή $f \uparrow (0,+\infty)$.

$A = (0,+\infty) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f \uparrow} f(A) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$

▶ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\ln x \cdot \frac{1}{x} + x - 2\right) = (-\infty)\cdot(+\infty) - 2 = -\infty$

▶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln x}{x} + x - 2\right) = +\infty$

Γ3. $x = e^{\frac{9x-x^2}{2}}$

- Αν $x \leq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $x > 0$:

$\ln x = \frac{9x-x^2}{2} \Leftrightarrow 2\ln x = 9x - x^2 \Leftrightarrow$

$2\frac{\ln x}{x} = 9 - x \Leftrightarrow 2\frac{\ln x}{x} + x - 2 = 7 \Leftrightarrow$

$f(x) = 7.$

το $7 \in f(A) = \mathbb{R}$ και $f \uparrow$ οπότε υπάρχει μοναδικό

$x_0 \in A : f(x_0) = 7.$

Γ4. A) $f \nearrow$ οπότε f "1-1", άρα $\exists$ η f^{-1}

$A_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R}$

$f^{-1}(A) = A_f = (0, +\infty)$

Αφού $f \nearrow$ αν $\exists$ σημεία τομής των f, f^{-1} πάνω στην $y=x$

Συνεπώς $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow 2\frac{\ln x}{x} + x - 2 = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = 1 \Leftrightarrow \ln x = x$ Άτοπο.

B).

Αρχικά θα υπολογίσουμε την ελάχιστη απόσταση της C_f από $y=x$.

Έστω $M(x, f(x))$ σημείο της C_f τότε η απόσταση του M από την $x-y=0$ είναι:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|x - f(x)|}{\sqrt{1+1}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(x - f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \frac{x - \ln x}{x}$$

Έστω $d(x) = \sqrt{2}\,\frac{x - \ln x}{x}$ τότε $d'(x) = \sqrt{2}\,\frac{x - 1 - x + \ln x}{x^2}$

$x > 0$

$$d'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2} \cdot \sqrt{2}$$

x	0		e		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα το σημείο της C_f που απέχει την μικρότερη απόσταση από την $y=x$ είναι το $A(e, \frac{2}{e} + e - 2)$

Το αντίστοιχο σημείο της $C_{f^{-1}}$ εξαιτίας της συμμετρίας ως προς την $y=x$ είναι $B(\frac{2}{e} + e - 2, e)$

$(*)$ $x - f(x) = x - 2\frac{\ln x}{x} - x + 2 = 2\frac{x - \ln x}{x} > 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$, $g'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$

$g''(x)=\frac{(f''(x)-f'(x))e^x-e^x(f'(x)-f(x))}{(e^x)^2}$

$g''(x)=\frac{(f''(x)-2f'(x)+f(x))\cancel{e^x}}{(e^x)^{\cancel{2}}}=\frac{f''(x)-2f'(x)+f(x)}{e^x}$

Απο υπόθεση $f''(x)-2f'(x)+f(x)>0$ Αρα $g''(x)>0 \Rightarrow g$ ∪

Δ2. Εφ: $y-g(0)=g'(0)(x-0)$

Η $y=3x+1$ εφαπτομένη της C_f για $x=0 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=1 \\ f'(0)=3 \end{cases}$

οποτε $g(0)=\frac{1}{1}=1$, $g'(0)=\frac{3-1}{1}=2$.

Εφ: $y-1=2x \Leftrightarrow \boxed{y=2x+1}$

g ∪ αρα $g(x)\geq 2x+1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x}\geq 2x+1 \Leftrightarrow \boxed{f(x)\geq(2x+1)e^x}$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}[(2x+1)\cdot e^x]=+\infty$ θα ισχύει $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

Δ3. $e^x f'(\ln x)-x\cdot f'(x)=e^x f(\ln x)-x f(x)$

$\Leftrightarrow e^x(f'(\ln x)-f(\ln x))=x(f'(x)-f(x))$

$\overset{:xe^x}{\Longleftrightarrow} \frac{f'(\ln x)-f(\ln x)}{x}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$

$\Leftrightarrow g'(\ln x)=g'(x) \xLeftrightarrow[\text{αφού } g''(x)>0]{g'\uparrow \Rightarrow g' \text{ 1-1}}$

$\ln x=x$ Αδύνατη αφού $x-\ln x\geq 1$.

Δ4. Αρκεί $2e^x < \frac{f(x)-e^x}{x} < f'(x)-f(x)$

$$\overset{:e^x}{\iff} 2 < \frac{\frac{f(x)}{e^x}-1}{x} < \frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$$

$$\iff g'(0) < \frac{g(x)-g(0)}{x} < g'(x)$$

Από ΘΜΤ στο $[0,x]$ $\exists\, \xi \in (0,x): g'(\xi) = \frac{g(x)-g(0)}{x}$

$$0<\xi<x \overset{g' \uparrow}{\iff} g'(0) < g'(\xi) < g'(x)$$

$$\iff g'(0) < \frac{g(x)-g(0)}{x} < g'(x)$$

Οπότε ισχύει το ζητούμενο.